

Relativistische Sterne

von Mike Georg Bernhardt*

18. Oktober 2010

Im Folgenden wird zunächst ein kurzer Abriss der Allgemeinen Relativitätstheorie gegeben und diese auf kompakte Sterne, d.h. Neutronensterne und Weiße Zwerge, angewandt. Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen, welche die Struktur relativistischer Sterne beschreiben, werden hergeleitet und analytisch für den Außenbereich eines Sterns sowie das Innere eines Sterns homogener Dichte gelöst. Schließlich wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem die TOV-Gleichungen auch im Inneren von Sternen inhomogener Dichte gelöst werden können.

Der hier wiedergegebene Text entspricht im wesentlichen den Kapiteln 2 und 3 meiner Diplomarbeit [1].

*E-Mail: m.g.bernhardt@web.de

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Relativitätstheorie	3
1.1	Differentialgeometrie	3
1.2	Gravitation	10
2	Relativistische Sterne	12
2.1	Metrik statischer, kugelsymmetrischer Systeme	12
2.2	Stellare Strukturgleichungen	15
2.3	Äußere Schwarzschild-Lösung	20
2.4	Innere Schwarzschild-Lösung	21
2.5	Numerische Lösung der TOV-Gleichungen	24
2.6	Neutronensterne	26
2.7	Weißer Zwerge	31
	Literaturverzeichnis	33

1 Allgemeine Relativitätstheorie

1.1 Differentialgeometrie

Die Differentialgeometrie bildet das mathematische Gerüst der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die physikalische Raumzeit erfüllt alle Eigenschaften einer **Mannigfaltigkeit**; veranschaulicht bedeutet dies, dass die Raumzeit lokal wie der euklidische Raum \mathbb{R}^4 aussieht, d.h. sie ist lokal flach und kann in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte durch 4-Tupel reeller Zahlen, so genannte Koordinaten, beschrieben werden. Eine solche Umgebung mit ihrem Koordinatensystem nennt man eine Karte. Da die Raumzeit gekrümmt sein kann, benötigt man im Allgemeinen mehrere, sich überlappende Karten zur vollständigen Beschreibung der Raumzeit.¹

Auf der Raumzeit-Mannigfaltigkeit Σ können Kurven $C: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$, $\lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$ definiert werden. Durch die Ableitung von C nach dem Kurvenparameter λ im Punkt p ist ein **Tangentialvektor** an die Kurve in diesem Punkt gegeben:

$$v_p^\alpha = \left. \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right|_p. \quad (1.1)$$

Dieser Tangentialvektor ist kein Element der Mannigfaltigkeit (eine Mannigfaltigkeit ist kein Vektorraum, sondern eine Punktmenge); man muss sich eher an jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit einen Vektorraum, den so genannten **Tangentialraum** $\mathcal{T}_p(\Sigma)$, angeheftet denken. $\mathcal{T}_p(\Sigma)$ ist die Menge der Tangentialvektoren aller durch p verlaufenden Kurven.

Der Tangentialvektor (1.1) kann auch koordinatenunabhängig geschrieben werden:²

$$v = \frac{d}{d\lambda}. \quad (1.2)$$

Fasst man die Basisvektoren $e_{(\alpha)}$ als die Tangentialvektoren an die durch p verlaufenden Koordinatenlinien auf, also jenen Kurven, längs derer sich nur die Koordinate x^α ändert und die anderen konstant bleiben, sodass x^α selbst als Kurvenparameter herangezogen werden kann, ergibt sich in dieser Notation³

$$e_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} =: \partial_\alpha. \quad (1.3)$$

¹Eine Analogie ist die Erde, deren Oberfläche nicht in einer einzigen Karte dargestellt werden kann.

²Im Folgenden lasse ich den Index p weg. v bezeichnet dann das Tangentialvektorfeld an die Kurve C .

³Der Index α nummeriert die Basisvektoren. Er steht in Klammern, damit man ihn nicht mit einem Komponentenindex verwechselt.

Aus (1.2) folgt mit der Kettenregel

$$v = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = v^\alpha e_{(\alpha)}, \quad (1.4)$$

was als die Entwicklung des Tangentialvektors nach den Basisvektoren interpretiert werden kann. Die vier Zahlen $dx^\alpha/d\lambda$ sind die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\{e_{(\alpha)}\}$.

Um die Länge eines Vektors und Winkel zwischen zwei Vektoren angeben zu können, muss auf dem Tangentialraum ein Skalarprodukt definiert sein. Dies geschieht durch Einführen der **Metrik** g . In der Sprache der Differentialgeometrie ist g eine 2-Form, also eine bilineare Funktion, die zwei Vektoren aus demselben Tangentialraum eine reelle Zahl, nämlich ihr Skalarprodukt, zuordnet, $g: \mathcal{T}_p(\Sigma) \times \mathcal{T}_p(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, mit

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= g(v, w) \\ &= g(v^\alpha e_{(\alpha)}, w^\beta e_{(\beta)}) \\ &= v^\alpha w^\beta g(e_{(\alpha)}, e_{(\beta)}) \\ &= g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

wobei im dritten Schritt die Bilinearität ausgenutzt, und im vierten Schritt die Bezeichnung $g(e_{(\alpha)}, e_{(\beta)}) =: g_{\alpha\beta}$ eingeführt wurde.

Die Wirkung der Metrik auf einen einzigen Vektor interpretiert man wie folgt: Durch $\tilde{v}(\cdot) = g(v, \cdot)$ wird ein so genannter Kovektor oder dualer Vektor definiert, der ein Element des dualen Tangentialraumes $\tilde{\mathcal{T}}_p(\Sigma)$ ist. Auf einen Vektor $w \in \mathcal{T}_p(\Sigma)$ angewandt, liefert er das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \tilde{v}(w) \\ &= \tilde{v}(w^\beta e_{(\beta)}) \\ &= \tilde{v}(e_{(\beta)}) w^\beta \\ &= v_\beta w^\beta, \end{aligned} \quad (1.6)$$

wobei die Schreibweise $\tilde{v}(e_{(\beta)}) = g(v^\alpha e_{(\alpha)}, e_{(\beta)}) = v^\alpha g_{\alpha\beta} =: v_\beta$ eingeführt wurde. Ein Dualvektor ist eine 1-Form, d.h. eine lineare Funktion, die einem Vektor aus $\mathcal{T}_p(\Sigma)$ eine reelle Zahl zuordnet.

Eine Mannigfaltigkeit, auf deren Tangentialräumen ein Skalarprodukt definiert ist, nennt man Riemann'sche Mannigfaltigkeit, wenn das Skalarprodukt positiv definit ist. Die Raumzeit ist eine **Pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit**, denn das Skalarprodukt eines Vierervektors mit sich selbst kann positiv, negativ oder Null sein. Daraus ergibt sich die Unterscheidung in raumartige,

zeitartige und lichtartige Vierervektoren.⁴ Die unterschiedlichen Vorzeichen für Raum- und Zeitkoordinaten in der Metrik sind eine physikalische Notwendigkeit, denn dadurch wird die kausale Struktur der Raumzeit bestimmt.

Durch die Abbildung $\Theta: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ sei ein Basiswechsel auf Σ gegeben. Für die Basisvektoren folgt mit der Kettenregel

$$e_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} e_{(\alpha')} \quad \curvearrowright \quad e_{(\alpha')} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} e_{(\alpha)}. \quad (1.7)$$

In (1.4) eingesetzt, ergibt sich das Transformationsverhalten eines Vektors bezüglich dieser Koordinatentransformation:

$$v = v^\alpha e_{(\alpha)} = v^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} e_{(\alpha')} = v^{\alpha'} e_{(\alpha')} \quad \curvearrowright \quad v^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} v^\alpha. \quad (1.8)$$

Ein Vergleich von (1.7) mit (1.8) zeigt, dass sich die Vektorkomponenten genau gegenläufig zu den Basisvektoren transformieren. Man nennt v^α daher auch die **kontravarianten Komponenten** von v . Das Transformationsverhalten eines Dualvektors folgt aus der Forderung, dass das Skalarprodukt invariant unter Koordinatentransformationen ist:

$$\langle v, w \rangle = v_\alpha w^\alpha \stackrel{!}{=} v_{\alpha'} w^{\alpha'} = v_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} w^\alpha \quad \curvearrowright \quad v_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} v_\alpha. \quad (1.9)$$

Dies ist identisch mit dem Transformationsverhalten der Basisvektoren (1.7). Man nennt v_α deshalb die **kovarianten Komponenten** von v .

Ein für die Physik zentraler Begriff ist die Differentiation von Funktionen und Vektorfeldern. Durch (1.4) wurde der Tangentialvektor an die Kurve $C: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$, $\lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$ als Ableitungsoperator nach dem Kurvenparameter eingeführt. Dieser kann auf eine skalare Funktion $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $x^\alpha \mapsto f(x^\alpha)$ angewandt werden, was eine reelle Zahl ergibt:

$$v(f) = v^\alpha \partial_\alpha f = \langle v, \nabla f \rangle =: \nabla_v f. \quad (1.10)$$

Durch $v(f)$ ist also die **Richtungsableitung** des Skalarfeldes f längs v gegeben. Setzt man die Komponenten $v^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ ein, so ergibt sich

$$\nabla_v f = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{df}{d\lambda}, \quad (1.11)$$

⁴Die Zuordnung hängt von der Signatur der Metrik ab. Setzt man $\eta = 1$ für die Signatur $(-, +, +, +)$ und $\eta = -1$ für die Signatur $(+, -, -, -)$, so gilt

$$\eta x_\alpha x^\alpha \begin{cases} > 0 \curvearrowright x^\alpha \text{ ist raumartig,} \\ = 0 \curvearrowright x^\alpha \text{ ist lichtartig,} \\ < 0 \curvearrowright x^\alpha \text{ ist zeitartig.} \end{cases}$$

wobei das Skalarfeld f nun als Funktion auf den Parametern $\lambda \in \mathbb{R}$ aufgefasst wurde, statt auf den Punkten von Σ . Die totale Ableitung von f (genauer: von $f \circ C$) nach dem Kurvenparameter von C entspricht also der Richtungsableitung von f entlang des Tangentialvektors an C .

Im \mathbb{R}^4 steht zusätzlich die Richtungsableitung eines Vektorfeldes w entlang der Kurve C zur Verfügung:

$$\nabla_v w = \frac{dw}{d\lambda} := \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{w(\lambda + d\lambda) - w(\lambda)}{d\lambda}. \quad (1.12)$$

Im Falle der Raumzeit – oder einer allgemeinen Mannigfaltigkeit – ist zu bedenken, dass dieser Differentialquotient nur dann wohldefiniert ist, wenn die beiden Vektoren $w(\lambda + d\lambda)$ und $w(\lambda)$ dem gleichen Tangentialraum angehören. Im \mathbb{R}^4 ist dies der Fall, nicht aber in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit. Um den Differentialquotienten zu bilden, muss einer von beiden Vektoren in geeigneter Weise in den Tangentialraum des anderen Vektors transportiert werden. Bildlich gesprochen muss ein **Zusammenhang** zwischen verschiedenen Tangentialräumen definiert sein. Man kann dann schreiben

$$\nabla_v w = \frac{Dw}{d\lambda} := \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{\bar{w}_{\lambda+d\lambda}(\lambda) - w(\lambda)}{d\lambda}, \quad (1.13)$$

wobei $\bar{w}_{\lambda+d\lambda}(\lambda)$ der Vektor ist, der aus $w(\lambda + d\lambda)$ durch Paralleltransport vom Punkt $x^\alpha(\lambda + d\lambda)$ nach $x^\alpha(\lambda)$ entsteht. $\nabla_v w$ bezeichnet die so genannte **kovariante Ableitung** des Vektorfeldes w längs v . Ein Zusammenhang zwischen verschiedenen Tangentialräumen besteht, wenn die kovarianten Ableitungen aller Basisvektoren entlang aller Basisvektoren – also $\nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)}$ für alle α, β – gegeben sind. Als Ableitungsoperator genügt ∇_v der Produktregel, und es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_v w &= \nabla_v w^\alpha e_{(\alpha)} \\ &= (\nabla_v w^\alpha) e_{(\alpha)} + w^\alpha \nabla_v e_{(\alpha)} \\ &= v^\beta \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta} e_{(\alpha)} + w^\alpha v^\beta \nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

worin ausgenutzt wurde, dass die kovariante Ableitung einer Vektorkomponente, $\nabla_v w^\alpha$, der normalen Richtungsableitung (1.10) entspricht. Der Vektor $\nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)}$ kann nach den Basisvektoren $e_{(\gamma)}$ entwickelt werden:

$$\nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_{(\gamma)}. \quad (1.15)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ nennt man **Christoffelsymbole**. Mit ihnen ergibt sich aus (1.14) die γ -Komponente der kovarianten Ableitung zu

$$(\nabla_v w)^\gamma = v^\beta \partial_\beta w^\gamma + w^\alpha v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{dw^\gamma}{d\lambda} + w^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (1.16)$$

wobei im zweiten Schritt die Komponenten $v^\beta = dx^\beta/d\lambda$ des Tangentialvektors eingesetzt und die Kettenregel angewandt wurde. Betrachten wir als Spezialfall die kovariante Ableitung entlang $e_{(\beta)}$, also $\nabla_{e_{(\beta)}} =: \nabla_\beta$; sie lautet

$$(\nabla_\beta w)^\gamma = \partial_\beta w^\gamma + w^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \tag{1.17}$$

Im Folgenden werde ich zur Vereinfachung die Klammer weglassen und für die kovariante Ableitung einfach $\nabla_\beta w^\gamma$ schreiben; man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass damit nicht die Ableitung der w^γ -Komponente gemeint ist (was einfach die partielle Ableitung $\partial_\beta w^\gamma$ ist), sondern die γ -Komponente der kovarianten Ableitung von w !

Die kovariante Ableitung ermöglicht es, den Begriff des **Paralleltransportes** eines Vektors eindeutig zu definieren. Zur Veranschaulichung betrachten wir einen Halbkreis (als Beispiel einer Mannigfaltigkeit) mit dem Tangentialvektor w im Punkt p . Auf den ersten Blick scheint es mehrere Möglichkeiten zu geben, diesen Vektor zum Punkt q hin parallel zu verschieben: Man kann darunter entweder eine solche Verschiebung verstehen, die die Richtung des Vektors beibehält, wie in Abbildung 1a gezeigt; oder man versteht darunter eine Verschiebung wie in Abbildung 2a, sodass der Vektor während des Transportes immer tangential zu jener Kurve bleibt, entlang derer er verschoben wird. Die erste Variante mag vernünftig erscheinen, da die Vektoren w und \hat{w} in Abbildung 1a tatsächlich parallel sind; jedoch hängt dieses Urteil von der Art der Einbettung der Mannigfaltigkeit ab! Der Halbkreis kann ohne Änderung seiner inneren Geometrie zu einer Linie abgerollt werden – wie in Abbildung 1b und 2b dargestellt (der Riemann-Tensor einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit ist Null; der Halbkreis hat also keine innere Krümmung, sondern nur eine durch die Art der Einbettung bestimmte äußere Krümmung). Wie man sieht, sind w und \hat{w} dann nicht mehr „parallel“ zueinander. Dies zeigt, dass die von der euklidischen Geometrie geprägte Anschauung der Begriffe Parallelität und Parallelverschiebung nicht ohne weiteres auf Mannigfaltigkeiten übertragbar ist. Stattdessen müssen diese Begriffe durch innere Eigenschaften der Mannigfaltigkeit definiert werden; so geschehen mit der

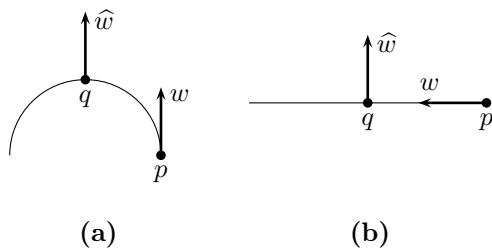


Abb. 1 Paralleltransport, 1. Methode

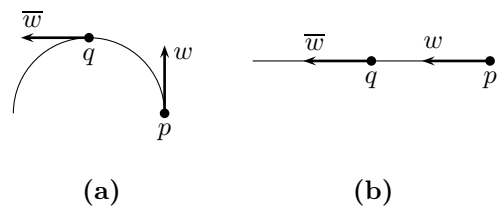


Abb. 2 Paralleltransport, 2. Methode

2. Methode. In diesem Sinne sind die Vektoren w und \bar{w} in Abbildung 2 zueinander parallel. Etwas formaler ausgedrückt: Ein Vektor w ist entlang der Kurve C parallel transportiert, wenn die kovariante Ableitung in Richtung des Tangentialvektors v dieser Kurve verschwindet, $\nabla_v w = 0$. Eine Kurve, entlang derer der Tangentialvektor selbst parallel transportiert ist, $\nabla_v v = 0$, heißt **Geodäte**. Wie aus (1.16) ersichtlich, erfüllt sie die Kurvengleichung

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\lambda^2} + \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0. \quad (1.18)$$

Unter einer Geodäte kann man sich die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Mannigfaltigkeit vorstellen. Im euklidischen Raum sind dies Geraden; auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit können Geodäten jedoch gekrümmt sein.

Ein Charakteristikum der euklidischen Geometrie ist das Parallelenaxiom: Zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt; parallele Geraden schneiden sich nie. Für die Geodäten auf einer Mannigfaltigkeit ist dies im Allgemeinen nicht zutreffend. Aus dem nichtlinearen Verhalten des Abstandsvektors benachbarter Geodäten – der so genannten **geodätischen Abweichung** – kann ein Maß für die Krümmung der Mannigfaltigkeit abgeleitet werden. Dazu betrachtet man eine Familie von Geodäten, deren Punkte durch $x^\alpha(\lambda, \zeta)$ gegeben seien, wobei λ die Geodäten parametrisiert und ζ den Übergang zwischen verschiedenen Geodäten. Neben dem Tangentialvektor $v^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ gibt es in jedem Punkt einen Abstandsvektor $u^\alpha = dx^\alpha/d\zeta$ zwischen verschiedenen Geodäten. Der Ausdruck $\nabla_v u$ hat dann die Bedeutung einer relativen Geschwindigkeit zweier Geodäten, und $\nabla_v \nabla_v u = D^2 u/d\lambda^2$ entspricht der relativen Beschleunigung. Es gilt

$$\frac{D^2 u}{d\lambda^2} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_{(\alpha)} v^\beta v^\gamma u^\delta \quad (1.19)$$

mit dem **Riemann'schen Krümmungstensor**

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} := \partial_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^\alpha \Gamma_{\delta\beta}^\varepsilon - \Gamma_{\delta\varepsilon}^\alpha \Gamma_{\gamma\beta}^\varepsilon. \quad (1.20)$$

Der Riemann-Tensor beschreibt die intrinsische Krümmung einer Mannigfaltigkeit – im Unterschied zur äußeren Krümmung, die eine Folge der Einbettung in einen höherdimensionalen Raum und somit keine direkte Eigenschaft der Mannigfaltigkeit selbst ist. Man bezeichnet eine Mannigfaltigkeit als gekrümmt, wenn der zugehörige Riemann'sche Krümmungstensor von Null verschiedene Komponenten besitzt. Diese Aussage ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, denn ein Tensor, der in einem Koordinatensystem von Null verschiedene Komponenten besitzt, hat auch in jedem anderen Koordinatensystem nichtverschwindende

Komponenten: Einen Tensor kann man nicht wegtransformieren!⁵ Weitere Konsequenzen der Krümmung einer Mannigfaltigkeit sind die Wegabhängigkeit des Paralleltransportes von Vektoren und die Nichtvertauschbarkeit der kovarianten Ableitung. Auf ein Vektorfeld w angewandt bedeutet dies⁶

$$(\nabla_\gamma \nabla_\delta - \nabla_\delta \nabla_\gamma)w = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_{(\alpha)} w^\beta. \quad (1.21)$$

In der Allgemeinen Relativitätstheorie und insbesondere in der Branentheorie spielt ein weiterer Krümmungstensor eine wichtige Rolle, nämlich der **Weyl-Tensor**. Dieser ergibt sich aus dem Riemann-Tensor durch Abziehen aller Kontraktionen:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} := R_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha[\gamma} R_{\delta]\beta} - R_{\alpha[\gamma} g_{\delta]\beta} + \frac{1}{3} R g_{\alpha[\gamma} g_{\delta]\beta} \quad (1.22)$$

mit dem **Ricci-Tensor** $R_{\alpha\beta} := R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$ und dem **Ricci-Skalar** $R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. Der Weyl-Tensor ist so konstruiert, dass all seine Spuren ($C^\beta{}_{\beta\gamma\delta}$, $C^\gamma{}_{\beta\gamma\delta}$, $C^\delta{}_{\beta\gamma\delta}$ etc.) verschwinden; er ist also der spurfreie Anteil des Riemann-Tensors und besitzt auch dessen Symmetrieeigenschaften. Darüber hinaus ist er invariant unter konformen (= winkeltreuen) Transformationen, d.h. zu einer Metrik $g_{\alpha\beta}$ gehört der gleiche Weyl-Tensor wie zur Metrik $\Omega^2 g_{\alpha\beta}$, mit einer beliebigen Funktion $\Omega = \Omega(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Die physikalische Bedeutung des Weyl-Tensors werde ich im nächsten Kapitel noch näher erläutern.

⁵Diese Eigenschaft folgt aus dem Transformationsverhalten eines Tensors bei Wechsel des Koordinatensystems: $A^{\alpha'}{}_{\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha{}_\beta$. Ist $A^\alpha{}_\beta = 0$ für alle α und β , so verschwinden auch alle $A^{\alpha'}{}_{\beta'}$, d.h. in jedem anderen Koordinatensystem ist der Tensor ebenfalls Null.

⁶Ich gehe grundsätzlich von verschwindender Torsion aus, also $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}$, was von den Christoffelsymbolen als Zusammenhangskomponenten automatisch erfüllt wird.

1.2 Gravitation

Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert eine geometrische Erklärung der Gravitation, indem sie die Krümmung der Raumzeit mit einer vorgegebenen Materieverteilung in Beziehung setzt. Die Kopplung zwischen Materie und Krümmung kommt durch die **Einstein'schen Feldgleichungen**

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad \kappa := 8\pi G \quad (1.23)$$

zum Ausdruck.⁷ Eine äquivalente Formulierung der Feldgleichungen erhält man durch Bildung der Spur, also Multiplikation von (1.23) mit $g^{\alpha\beta}$ und Summation über beide Indizes: $R - \frac{1}{2}R\delta^\alpha_\alpha = R - 2R = -R = \kappa T^\alpha_\alpha =: \kappa T$. Einsetzen in (1.23) ergibt

$$R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}). \quad (1.24)$$

Man kann zeigen, dass sich Testteilchen, d.h. Photonen oder massebehaftete Körper, die eine vernachlässigbare Krümmung der Raumzeit verursachen, stets entlang geodätischer Linien bewegen, sofern sie keinen äußeren Kräften unterworfen sind.⁸ Ihre Trajektorien genügen also der Bewegungsgleichung (1.18)

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\lambda^2} + \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0, \quad (1.25)$$

wobei λ die Bahnkurve parametrisiert. Für die zeitartigen Bahnkurven massebehafteter Testteilchen kann man als Kurvenparameter die Eigenzeit τ wählen. Kombiniert man dies mit den Einstein'schen Feldgleichungen, so ergibt sich folgendes Bild: Materie (Masse und Energie) krümmt die Raumzeit; in einer gekrümmten Raumzeit sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten – die Geodäten – im Allgemeinen keine Geraden mehr, sondern Kurven; Photonen und materielle Körper bewegen sich entlang dieser gekrümmten Geodäten; dies erweckt den Anschein einer Kraftwirkung. Die Newton'sche Schwerkraft wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie somit als Scheinkraft interpretiert.

Man beachte, dass durch die Einsteingleichungen (1.23) bzw. (1.24) Materie nicht an den Riemann-Tensor gekoppelt wird, der die (innere) Krümmung der Raumzeit beschreibt, sondern an den Ricci-Tensor. Zerlegt man den Riemann-Tensor wie in Gleichung (1.22) in den Weyl-Tensor, Ricci-Tensor und Ricci-Skalar,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} + R_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta} - \frac{1}{3}Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta}, \quad (1.26)$$

⁷Ich gehe davon aus, dass die kosmologische Konstante – wenigstens in den für uns interessanten Situationen im Inneren und in der näheren Umgebung eines Sterns – vernachlässigbar klein ist.

⁸Siehe Weinberg [2], Seite 70–77.

so sieht man, dass der Krümmungsanteil, der nicht durch die Einsteingleichungen festgelegt wird, mit dem Weyl-Tensor übereinstimmt. Dieser ist jedoch nicht völlig unbestimmt: Da der Riemann-Tensor die Bianchi-Identität $\nabla_{[\epsilon} R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0$ erfüllt, hängt der Weyl-Tensor über die Beziehung

$$\nabla^\alpha C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nabla_{[\gamma} R_{\delta]\beta} + \frac{1}{6} g_{\beta[\gamma} \nabla_{\delta]} R \quad (1.27)$$

vom Ricci-Tensor ab.⁹ Mit den Einsteingleichungen (1.24) folgt dann der Zusammenhang zwischen der Materieverteilung und Weylkrümmung:

$$\nabla^\alpha C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \kappa(\nabla_{[\gamma} T_{\delta]\beta} + \frac{1}{3} g_{\beta[\gamma} \nabla_{\delta]} T). \quad (1.28)$$

Wie man an den Einsteingleichungen (1.23) und (1.24) sieht, gilt bei Abwesenheit jeglicher Materie, also verschwindendem Energie-Impuls-Tensor

$$G_{\alpha\beta} = 0, \quad R_{\alpha\beta} = 0, \quad R = 0. \quad (1.29)$$

Aus der Definition des Weyl-Tensors (1.22) folgt in diesem Falle

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.30)$$

Im Vakuum ist der Weyl-Tensor also mit dem Riemann-Tensor identisch. Folglich wird durch den Weyl-Tensor die Krümmung in Vakuumregionen der Raumzeit beschrieben – wie z.B. Gezeiteneffekte und Gravitationswellen. Im Gegensatz zum Ricci-Tensor, der mit dem Energie-Impuls-Tensor durch den algebraischen Ausdruck (1.23) verknüpft ist, ist der Weyl-Tensor über eine Differentialgleichung an Materie gekoppelt. Folglich gibt es zu einem vorgegebenen Energie-Impuls-Tensor, je nach Wahl der Randbedingungen, mehrere Lösungen für den Weyl-Tensor.

⁹Siehe Carroll [3], Seite 169 f.

2 Relativistische Sterne

2.1 Metrik statischer, kugelsymmetrischer Systeme

Wir betrachten den idealen Fall eines statischen und kugelsymmetrischen Sterns, suchen also nach Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen in Regionen der Raumzeit mit diesen Eigenschaften. Die gesuchte Metrik sollte in großer Entfernung zum Stern in die Minkowski-Metrik übergehen, das in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ausgedrückte Linienelement demnach gegen

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.1)$$

streben. Die Forderungen nach Statik und Rotationssymmetrie sind erfüllt, wenn wir für das Linienelement in der Umgebung des Sterns den Ansatz

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\bar{\Lambda}} dr^2 + e^{2\Theta} r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.2)$$

wählen, wobei Φ , $\bar{\Lambda}$ und Θ Funktionen von r sind.¹⁰ Die Freiheit in der Wahl des Koordinatensystems kann dazu ausgenutzt werden, den Faktor $e^{2\Theta}$ verschwinden zu lassen. Dazu definieren wir zunächst eine neue radiale Koordinate $\bar{r} := e^\Theta r$, mit dem Differential

$$d\bar{r} = e^\Theta dr + e^\Theta r d\Theta = (1 + r\Theta')e^\Theta dr. \quad (2.3)$$

Die Substitution von r durch \bar{r} in (2.2) ergibt dann

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \frac{e^{2(\bar{\Lambda}-\Theta)}}{(1+r\Theta')^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (2.4)$$

worin Φ , $\bar{\Lambda}$ und Θ nun als Funktionen von \bar{r} aufgefasst werden. Schließlich können noch die folgenden Umbenennungen vorgenommen werden

$$\bar{r} \rightarrow r, \quad \frac{e^{2(\bar{\Lambda}-\Theta)}}{(1+r\Theta')^2} \rightarrow e^{2\Lambda}, \quad (2.5)$$

und wir erhalten das einfachere, aber ebenso allgemeine Linienelement

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.6)$$

¹⁰ Φ , $\bar{\Lambda}$ und Θ treten hier als Argumente der Exponentialfunktion auf, was den Vorteil hat, dass man dem Linienelement direkt die Signatur der Metrik $(-, +, +, +)$ ansieht.

Die oben definierten raumzeitlichen Polarkoordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ nennt man **Schwarzschildkoordinaten** oder auch Krümmungskoordinaten.¹¹ Aus dem zugehörigen **metrischen Tensor**

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

und dessen Inverse

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

ergeben sich die **Christoffelsymbole** $\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} := \frac{1}{2} g^{\delta\gamma} (\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Phi', & \Gamma_{tt}^r &= \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)}, & \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} &= r^{-1}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \Lambda', & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r e^{-2\Lambda}, & \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= r^{-1}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta, & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= \cos \vartheta \sin^{-1} \vartheta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

und daraus der **Riemann-Tensor** $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} := \partial_{\gamma} \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} - \partial_{\delta} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^{\alpha} \Gamma_{\delta\beta}^{\varepsilon} - \Gamma_{\delta\varepsilon}^{\alpha} \Gamma_{\gamma\beta}^{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} R^t{}_{rtr} &= \Phi' \Lambda' - \Phi'' - \Phi'^2, & R^r{}_{\vartheta r\vartheta} &= r \Lambda' e^{-2\Lambda}, \\ R^t{}_{\vartheta t\vartheta} &= -r \Phi' e^{-2\Lambda}, & R^r{}_{\varphi r\varphi} &= r \Lambda' e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta, \\ R^t{}_{\varphi t\varphi} &= -r \Phi' e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta, & R^{\vartheta}{}_{\varphi\vartheta\varphi} &= (1 - e^{-2\Lambda}) \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (2.10)$$

der **Ricci-Tensor** $R_{\alpha\beta} := R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}$

$$\begin{aligned} R_{tt} &= (\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi' \Lambda' + 2\Phi' r^{-1}) e^{2(\Phi-\Lambda)}, \\ R_{rr} &= -\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi' \Lambda' + 2\Lambda' r^{-1}, \\ R_{\vartheta\vartheta} &= (r \Lambda' - r \Phi' - 1) e^{-2\Lambda} + 1, \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \vartheta R_{\vartheta\vartheta}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹¹Die anschauliche Bedeutung der Schwarzschild- r -Koordinate ist die folgende (siehe Misner et al. [4], Seite 595 ff): Sei P ein Punkt, durch den eine Kugeloberfläche mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung gelegt wurde, und A_0 deren Flächeninhalt, gemessen in Eigenlängen. Für die Schwarzschild- r -Koordinate von P gilt dann $4\pi r^2 = A_0$.

der **Ricci-Skalar** $R := R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$

$$R = -2\left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + 2\frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + \frac{1 - e^{2\Lambda}}{r^2}\right)e^{-2\Lambda}, \quad (2.12)$$

und schließlich der **Einstein-Tensor** $G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} G_{tt} &= (2r\Lambda' - 1 + e^{2\Lambda})r^{-2}e^{2(\Phi-\Lambda)}, \\ G_{rr} &= (2r\Phi' + 1 - e^{2\Lambda})r^{-2}, \\ G_{\vartheta\vartheta} &= \left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r}\right)r^2e^{-2\Lambda}, \\ G_{\varphi\varphi} &= \sin^2\vartheta G_{\vartheta\vartheta}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Alle übrigen, nicht genannten Komponenten sind Null.

2.2 Stellare Strukturgleichungen

Die Struktur statischer und kugelsymmetrischer Sterne wird durch einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben, den so genannten **Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen**¹²

$$m' = 4\pi r^2 \varrho, \quad (2.14)$$

$$\Phi' = \frac{Gm + 4\pi G r^3 p}{r(r - 2Gm)}, \quad (2.15)$$

$$p' = -(\varrho + p)\Phi', \quad (2.16)$$

die zusammen mit einer Zustandsgleichung der Sternmaterie

$$p = p(\varrho) \quad (2.17)$$

ein geschlossenes Gleichungssystem für die vier unbekannt Funktionen $m(r)$, $\varrho(r)$, $p(r)$ und $\Phi(r)$ bilden. Das zugehörige Linienelement lautet

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.18)$$

Während die Zustandsgleichung eine Materialeigenschaft ist, die ich als gegeben voraussetze, lassen sich die drei stellaren Strukturgleichungen direkt aus den Einstein'schen Feldgleichungen ableiten, wenn man für den Energie-Impuls-Tensor den einer idealen Flüssigkeit ansetzt:

$$T_{\alpha\beta} = (\varrho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}. \quad (2.19)$$

Darin bezeichnen $\varrho := \varrho_0 + \varepsilon$ die totale Massen-Energiedichte, die sich aus der Massendichte ϱ_0 und der inneren Energiedichte ε zusammensetzt, p den Druck und u^α die 4er-Geschwindigkeit des Flüssigkeitselementes im betrachteten Raumpunkt. Im statischen Fall ruht jedes Flüssigkeitselement bezüglich des gewählten Koordinatensystems, und die 4er-Geschwindigkeit hat nur eine t -Komponente, $u^\alpha = u^t \delta_t^\alpha$. Aus der Normierung $u_\alpha u^\alpha = -1$ folgt dann

$$u^\alpha = e^{-\Phi} \delta_t^\alpha, \quad u_\alpha = -e^\Phi \delta_\alpha^t, \quad (2.20)$$

und der Energie-Impuls-Tensor lautet

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pe^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

¹²Im Folgenden durch TOV-Gleichungen abgekürzt.

Setzt man diesen zusammen mit dem Einstein-Tensor (2.13) in $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$ ein, so erhält man die drei Gleichungen

$$(2r\Lambda' - 1 + e^{2\Lambda})e^{-2\Lambda} = \kappa r^2 \varrho, \quad (2.22)$$

$$(2r\Phi' + 1 - e^{2\Lambda})e^{-2\Lambda} = \kappa r^2 p, \quad (2.23)$$

$$\left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right) e^{-2\Lambda} = \kappa p. \quad (2.24)$$

Die $\varphi\varphi$ -Komponenten-Gleichung entspricht der $\vartheta\vartheta$ -Gleichung (2.24), und alle nichtdiagonalen Komponenten von $G_{\alpha\beta}$ und $T_{\alpha\beta}$ führen auf Gleichungen, die trivial erfüllt sind ($0 = 0$). Schreibt man (2.22) wie folgt um ($\kappa = 8\pi G$ eingesetzt)

$$8\pi G r^2 \varrho = 1 - e^{-2\Lambda} + 2r\Lambda' e^{-2\Lambda} = \left[r(1 - e^{-2\Lambda}) \right]' \quad (2.25)$$

und führt die Bezeichnung

$$r(1 - e^{-2\Lambda}) =: 2Gm(r) \quad \curvearrowright \quad e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \quad (2.26)$$

ein, so folgt die TOV-Gleichung $m'(r) = 4\pi r^2 \varrho$ und das Linienelement (2.18). Als Lösung dieser TOV-Gleichung erhalten wir die so genannte **totale Masse**

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho(r), \quad (2.27)$$

die man als relativistisches Analogon der Masse-Energie innerhalb des Kugelradius r interpretiert,¹³ wobei die Integrationskonstante $m(0) = 0$ gesetzt wurde.¹⁴ Stellt man (2.23) nach Φ' um und setzt $e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2Gm}{r}$ ein, so ergibt sich die

¹³Im Unterschied zur Newton'schen Masse

$$m_N(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho_0(r) \quad (2.28)$$

fließt in die totale Masse neben der Massendichte ϱ_0 auch die innere Energiedichte ε ein, $\varrho := \varrho_0 + \varepsilon$. Ferner unterscheidet sich (2.27) von der Ruhemasse

$$m_0(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho_0(r) e^{\Lambda(r)}, \quad (2.29)$$

und der so genannten gravitativen Masse

$$m_G(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho(r) e^{\Lambda(r)}, \quad (2.30)$$

bei denen die Integration über das Eigenvolumenelement $dV = 4\pi r^2 e^{\Lambda} dr$ ausgeführt wird.

¹⁴ Ich folge der Argumentation von Misner et al. [4], Seite 602: $m(0) = 0$ impliziert eine

zweite TOV-Gleichung, $\Phi' = \frac{Gm+4\pi Gr^3 p}{r(r-2Gm)}$. Die dritte TOV-Gleichung kann aus der Kombination von (2.22)–(2.24) hergeleitet werden. Man stellt zunächst (2.22) und (2.23) wie folgt um

$$2r\Lambda' = (\kappa r^2 \varrho - 1)e^{2\Lambda} + 1, \quad (2.33)$$

$$2r\Phi' = (\kappa r^2 p + 1)e^{2\Lambda} - 1 \quad (2.34)$$

und leitet (2.34) nach r ab

$$\begin{aligned} 2\Phi' + 2r\Phi'' &= 2\Lambda'(\kappa r^2 p + 1)e^{2\Lambda} + (2\kappa r p + \kappa r^2 p')e^{2\Lambda} \\ &= 2\Lambda'(2r\Phi' + 1) + (2\kappa r p + \kappa r^2 p')e^{2\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

wobei im zweiten Schritt wieder (2.34) eingesetzt wurde. Umstellen nach Φ''

$$\Phi'' = 2\Phi'\Lambda' - \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + (\kappa p + \frac{1}{2}\kappa r p')e^{2\Lambda} \quad (2.36)$$

und Einsetzen in (2.24) liefert zunächst

$$\begin{aligned} \kappa p e^{2\Lambda} &= 2\Phi'\Lambda' - \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + (\kappa p + \frac{1}{2}\kappa r p')e^{2\Lambda} + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \\ &= \Phi'^2 + \Phi'\Lambda' + (\kappa p + \frac{1}{2}\kappa r p')e^{2\Lambda} \end{aligned} \quad (2.37)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} p' &= -\frac{\Phi'^2 + \Phi'\Lambda'}{\frac{1}{2}\kappa r e^{2\Lambda}} = -\frac{2r\Phi' + 2r\Lambda'}{\kappa r^2 e^{2\Lambda}} \Phi' \\ &= -\frac{(\kappa r^2 p + 1)e^{2\Lambda} - 1 + (\kappa r^2 \varrho - 1)e^{2\Lambda} + 1}{\kappa r^2 e^{2\Lambda}} \Phi' \\ &= -(\varrho + p)\Phi', \end{aligned} \quad (2.38)$$

physikalisch akzeptable Geometrie ohne Singularität im Ursprung, denn für kleine r ist $\varrho(r) \approx \text{const}$, folglich gilt $m(r) = \frac{4}{3}\pi\varrho_c r^3$ mit $\varrho_c := \varrho(0)$, und das räumliche Linienelement lautet (mit der Abkürzung $d\Omega^2 := d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \left(1 - \frac{8}{3}\pi G\varrho_c r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \approx dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.31)$$

während $m(0) \neq 0$ eine im Ursprung singuläre Raummetrik zur Folge hat,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \approx -\frac{r dr^2}{2Gm(0)} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.32)$$

wobei im dritten Schritt (2.33) und (2.34) eingesetzt wurden. Alternativ lässt sich diese Gleichung auch aus der Energie-Impuls-Erhaltung $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ herleiten.¹⁵ Berechnet man die kovariante Ableitung des Energie-Impuls-Tensors

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha T^{\lambda\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta T^{\alpha\lambda} \quad (2.39)$$

mit

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pe^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pr^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^{-2} \sin^{-2} \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

und den Christoffelsymbolen (2.9), so liefert nur die $\beta = r$ -Komponente eine nichttrivial erfüllte Gleichung, nämlich

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \nabla_\alpha T^{\alpha r} = \partial_\alpha T^{\alpha r} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha T^{\lambda r} + \Gamma_{\alpha\lambda}^r T^{\alpha\lambda} \\ &= \partial_r T^{rr} + (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\vartheta r}^\vartheta + \Gamma_{\varphi r}^\varphi) T^{rr} \\ &\quad + \Gamma_{tt}^r T^{tt} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r T^{\vartheta\vartheta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r T^{\varphi\varphi} \\ &= \partial_r (pe^{-2\Lambda}) + (\Phi' + \Lambda' + r^{-1} + r^{-1}) pe^{-2\Lambda} \\ &\quad + \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)} \varrho e^{-2\Phi} + \Lambda' pe^{-2\Lambda} - re^{-2\Lambda} pr^{-2} - re^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta pr^{-2} \sin^{-2} \vartheta \\ &= [p' - 2\Lambda' p + (\Phi' + \Lambda' + 2r^{-1})p + \Phi' \varrho + \Lambda' p - 2pr^{-1}] e^{-2\Lambda} \\ &= [p' + (\varrho + p)\Phi'] e^{-2\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

was wieder auf $p' = -(\varrho + p)\Phi'$ führt.

Die beiden TOV-Gleichungen für Φ' und p' können zu einer Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht des Sterns kombiniert werden:¹⁶

$$p' = -\frac{(\varrho + p)(Gm + 4\pi Gr^3 p)}{r(r - 2Gm)}. \quad (2.42)$$

Etwas anschaulicher wird diese Gleichung, wenn man sie in der Form

$$p' = -\frac{Gm\varrho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\varrho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} \quad (2.43)$$

¹⁵Die Energie-Impuls-Erhaltung ist keine zusätzliche Bedingung, sondern sie folgt aus der Bianchi-Identität $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ und den Einsteingleichungen $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$.

¹⁶Diese Gleichung wurde erstmals von Oppenheimer und Volkoff [5] hergeleitet und wird daher auch als Oppenheimer-Volkoff-Gleichung bezeichnet.

oder, wenn auch noch die TOV-Gleichung $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ eingesetzt wird,

$$4\pi r^2 dp = -\frac{Gm dm}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} \quad (2.44)$$

schreibt. Man denke sich eine Kugelschale des Sterns mit Radius r und Dicke dr . Der Druck am inneren Rand der Kugelschale sei $p(r)$ und der am äußeren Rand $p(r) - dp$. Auf der linken Seite von (2.44) steht die Kraft, die aufgrund der Druckdifferenz dp auf die Kugelschale wirkt. Diese Kraft wird durch die Terme auf der rechten Seite ausbalanciert: Dabei ist der erste Faktor die Newton'sche Gravitationskraft, die zwischen der totalen Masse $m(r)$ innerhalb des Radius r und der Masse dm der Kugelschale wirkt; die drei anderen Faktoren können als allgemeinrelativistische Korrekturen aufgefasst werden, die eine betragsmäßige Vergrößerung des Druckgradienten im Vergleich zum Newton'schen Grenzfall $p' = -Gm\rho_0/r^2$ bewirken. Folgt man dem Druckverlauf von der Oberfläche zum Zentrum des Sterns, so ergibt die relativistische Berechnung einen stärkeren Anstieg als die Newton'sche Vorhersage. Da der Druck selbst als Korrekturterm einfließt, wird die Abweichung vom Newton'schen Limes umso größer, je größer der Druck ist. Dies hat zur Folge, dass relativistische Sterne kompakter sind und ab einer kritischen Gesamtmasse instabil werden, da der Druck im Zentrum dann beliebig groß würde.

2.3 Äußere Schwarzschild-Lösung

Eine analytische Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen im Außenbereich eines statischen, kugelsymmetrischen Sterns wurde erstmals von Karl Schwarzschild [6] gefunden. Seine Lösung wird üblicherweise aus den Einsteingleichungen im Vakuum, $R_{\alpha\beta} = 0$, hergeleitet, sie folgt aber auch aus den TOV-Gleichungen: Da Dichte und Druck außerhalb des Sterns verschwinden, gilt

$$m' = 0 \quad \curvearrowright \quad m(r \geq R) = \text{const} = m(R) =: M, \quad (2.45)$$

wobei mit R der Radius des Sterns bezeichnet wurde. Die TOV-Gleichung für Φ' lautet dann

$$\Phi' = \frac{GM}{r(r - 2GM)}, \quad (2.46)$$

was mit der Randbedingung $e^{2\Phi(\infty)} = 1$, also $\Phi(\infty) = 0$, integriert werden kann:

$$\Phi(r) = \int_{\infty}^r dr \Phi' = \int_{\infty}^r dr \frac{GM}{r^2(1 - \frac{2GM}{r})}. \quad (2.47)$$

Mit der Substitution

$$\xi := 1 - \frac{2GM}{r} \quad \curvearrowright \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{2GM}{r^2} \quad \curvearrowright \quad dr = d\xi \frac{r^2}{2GM} \quad (2.48)$$

erhalten wir

$$\Phi(r) = \int_1^{\xi} \frac{d\xi}{2\xi} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad \curvearrowright \quad e^{2\Phi} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (2.49)$$

und aus (2.18) folgt dann das Schwarzschild'sche Linienelement für $r > R$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.50)$$

2.4 Innere Schwarzschild-Lösung

Wie in Abschnitt 2.2 bereits erwähnt, benötigt man zur Lösung der TOV-Gleichungen im Inneren eines Sterns die Zustandsgleichung der Sternmaterie. Eine analytische Lösung wurde von Karl Schwarzschild [7] für eine homogene Dichteverteilung hergeleitet, also für die Zustandsgleichung

$$\varrho = \text{const} =: \varrho_* \quad \text{für alle } p(r), \quad (2.51)$$

was der Fall ist, wenn der Stern aus einer inkompressiblen Flüssigkeit besteht, oder sich aus Schichten unterschiedlicher Zusammensetzungen aufbaut, deren Zustandsgleichungen gerade die geforderte homogene Dichte trotz variierenden Druckes ergeben. Die totale Masse (2.27) im Inneren des Sterns ist dann

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_*, \quad (2.52)$$

und die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts (2.42) lautet

$$p' = -\frac{\frac{4}{3}\pi G r (\varrho_* + p)(\varrho_* + 3p)}{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2}. \quad (2.53)$$

Integration unter Berücksichtigung der Randbedingung $p(R) = 0$, liefert

$$\begin{aligned} \int_r^R dp \frac{1}{(\varrho_* + p)(\varrho_* + 3p)} &= -\frac{4}{3}\pi G \int_r^R dr \frac{r}{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2} \\ \leadsto \frac{1}{2\varrho_*} \ln \left(\frac{\frac{1}{3}\varrho_* + p}{\varrho_* + p} \right) \Big|_r^R &= \frac{1}{4\varrho_*} \ln \left(1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2 \right) \Big|_r^R \\ \leadsto \frac{\varrho_* + p(r)}{\varrho_* + 3p(r)} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* R^2}{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2}} = \sqrt{\frac{1 - r_S R^{-1}}{1 - r_S r^2 R^{-3}}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

mit dem Schwarzschildradius $r_S := 2GM$. Durch Umstellen nach $p(r)$ ergibt sich

$$p(r) = \varrho_* \frac{\sqrt{1 - r_S R^{-1}} - \sqrt{1 - r_S r^2 R^{-3}}}{\sqrt{1 - r_S r^2 R^{-3}} - 3\sqrt{1 - r_S R^{-1}}}. \quad (2.55)$$

Die metrische Funktion $e^{2\Phi}$ erhält man durch Integration der TOV-Gleichung $p' = -(\varrho_* + p)\Phi'$ mit den Randbedingungen $\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - r_S/R)$ (am Rand muss die innere Metrik stetig in die äußere Schwarzschildmetrik (2.49) übergehen)

und $p(R) = 0$

$$\begin{aligned}
\Phi(r) &= \Phi(R) + \int_r^R dr \frac{p'}{(\varrho_* + p)} \\
&= \Phi(R) + \ln(\varrho_* + p) \Big|_r^R \\
&= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_S}{R} \right) + \ln \left(\frac{\varrho_*}{\varrho_* + p(r)} \right) \\
&= \ln \left(- \frac{1 + p(r)\varrho_*^{-1}}{\sqrt{1 - r_S R^{-1}}} \right). \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Mit (2.55) ist das Ergebnis

$$e^{2\Phi} = \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} \right)^2, \tag{2.57}$$

und das Linienelement für $r < R$ lautet

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{R^3}} \right)^2 dt^2 \\
&\quad + \left(1 - \frac{2GM r^2}{R^3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, tritt im Zentrum des Sterns bei $r = 0$ keine Singularität auf (sofern ein Stern mit endlichem Radius R betrachtet wird).

Eine interessante Eigenschaft dieser Lösung ergibt sich aus dem Grenzwertverhalten von Gleichung (2.54), wenn man den zentralen Druck $p_c := p(0)$ gegen unendlich laufen lässt. In diesem Limes gilt

$$\frac{r_S}{R} = 1 - \left(\frac{\varrho_* + p_c}{\varrho_* + 3p_c} \right)^2 \rightarrow \frac{8}{9} \quad \text{für } p_c \rightarrow \infty. \tag{2.59}$$

Jeder stabile Stern homogener Dichte, dessen zentraler Druck einen endlichen Wert hat, erfüllt daher die Relation¹⁷

$$\frac{r_S}{R} < \frac{8}{9} \quad \curvearrowright \quad \frac{GM}{R} < \frac{4}{9}. \tag{2.60}$$

Wie man sieht, gilt $r_S < R$, d.h. der Schwarzschildradius eines solchen Sterns liegt in seinem Inneren, und somit treten weder in der inneren Metrik (2.58),

¹⁷Man kann zeigen, dass die Relation $GM/R < 4/9$ für alle Sterne gilt und nicht nur für Sterne mit homogener Dichte. Siehe Weinberg [2], Seite 331 ff.

noch in der äußeren (2.50) Koordinatensingularitäten auf. Mit $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_*$ ergibt sich aus (2.60) ein maximaler Radius und eine maximale Masse für einen Stern homogener Dichte:

$$R_{\max} = (3\pi G \varrho_*)^{-1/2}, \quad M_{\max} = \frac{4}{9}(3\pi G^3 \varrho_*)^{-1/2}. \quad (2.61)$$

Es ist denkbar, dass ein anfangs stabiler Stern durch das Aufsammeln von Materie – beispielsweise von einem Begleitstern – diese Grenzwerte überschreitet, somit instabil wird und kollabiert. Eine derartige Vorhersage existiert in der Newton'schen Gravitationstheorie nicht. Setzt man für ϱ_* die mittlere Dichte der Sonne ($\approx 1 \text{ g/cm}^3$) bzw. die eines typischen Weißen Zwergs ($\approx 10^6 \text{ g/cm}^3$) und Neutronensterns ($\approx 10^{15} \text{ g/cm}^3$) ein, erhält man die folgenden Werte:

$\varrho_* \text{ [g/cm}^3\text{]}$	R_{\max}	M_{\max}
1	$543 R_{\odot}$	$10^8 M_{\odot}$
10^6	$0,5 R_{\odot}$	$10^5 M_{\odot}$
10^{15}	11,95 km	$3,6 M_{\odot}$

In Abschnitt 2.6 wird die maximale Masse eines Neutronensterns mit inhomogener Dichteverteilung numerisch ermittelt. Das Ergebnis lautet $M_{\max} = 2,047 M_{\odot}$ bei einer zentralen Dichte von $\varrho_c = 2,85 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$.

2.5 Numerische Lösung der TOV-Gleichungen

Für realistische Sternmodelle mit einer inhomogenen Dichteverteilung existieren keine analytischen Lösungen der TOV-Gleichungen; man greift daher zu numerischen Verfahren. Falls die Zustandsgleichung der Sternmaterie als analytische Funktion $p = p(\varrho)$ gegeben ist,¹⁸ gilt

$$p(r) = p(\varrho(r)) \quad \curvearrowright \quad p' = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \varrho' \quad \curvearrowright \quad \varrho' = p' \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)^{-1}, \quad (2.62)$$

und die TOV-Gleichungen ergeben das Gleichungssystem

$$m' = 4\pi r^2 \varrho, \quad (2.63)$$

$$p' = -\frac{(c^2 \varrho + p)(Gm + 4\pi Gr^3 p/c^2)}{r(c^2 r - 2Gm)}, \quad (2.64)$$

$$\varrho' = -\frac{(c^2 \varrho + p)(Gm + 4\pi Gr^3 p/c^2)}{r(c^2 r - 2Gm)} \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)^{-1}, \quad (2.65)$$

$$\Phi' = \frac{Gm + 4\pi Gr^3 p/c^2}{r(c^2 r - 2Gm)}, \quad (2.66)$$

worin die Lichtgeschwindigkeit c wieder explizit eingesetzt wurde. Die ersten drei Differentialgleichungen sind unabhängig von Φ und können durch ein numerisches Verfahren wie dem Runge-Kutta-Algorithmus¹⁹ integriert werden. Dabei startet

¹⁸Zustandsgleichungen für Neutronensternmaterie liegen in der Regel nur in tabellarischer Form vor, an die bestenfalls eine analytische Funktion angefitet werden kann. Einen solchen Fit werde ich im Folgenden verwenden.

¹⁹Der Runge-Kutta-Algorithmus (RK4) ist ein Verfahren zur approximativen Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in x ,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \quad (2.67)$$

Sind die Werte der gesuchten Funktionen $\mathbf{y}(x)$ in einem Startpunkt x_0 bekannt, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, so ergeben sich die Werte von \mathbf{y} bei $x_{n+1} = x_n + h$ aus der Iteration

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \mathcal{O}(h^5), \quad (2.68)$$

mit

$$\mathbf{k}_1 = h \cdot \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \quad (2.69)$$

$$\mathbf{k}_2 = h \cdot \mathbf{f}\left(x_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right), \quad (2.70)$$

$$\mathbf{k}_3 = h \cdot \mathbf{f}\left(x_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right), \quad (2.71)$$

$$\mathbf{k}_4 = h \cdot \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3). \quad (2.72)$$

Der RK4-Algorithmus ist eine Methode 4. Ordnung in der Schrittweite h ; der Fehler in jeder Iteration ist $\mathcal{O}(h^5)$, während sich der totale Verfahrensfehler zu $\mathcal{O}(h^4)$ aufsummiert.

man im Zentrum des Sterns mit den Anfangswerten

$$m(0) = 0, \quad \varrho(0) = \varrho_c, \quad p(0) = p(\varrho_c), \quad (2.73)$$

wobei ϱ_c beliebig vorgegeben werden kann, und $p(\varrho_c)$ aus der Zustandsgleichung folgt.²⁰ Man führt die Iteration bis zum Rand des Sterns aus, der durch die Bedingung $p(R) = 0$ definiert ist. Als Ergebnis erhält man den Verlauf von $m(r)$, $p(r)$ und $\varrho(r)$ zu jedem Iterationsschritt r . Variiert man den Startwert ϱ_c , so erhält man eine Sequenz von Lösungen, also Sterne mit unterschiedlichen Radien R und Gesamtmassen $M := m(R)$.

Bei der Φ' -Gleichung handelt es sich um ein Randwertproblem, statt eines Anfangswertproblems wie bei den drei anderen Gleichungen, denn nicht der Wert $\Phi(0)$ im Zentrum ist bekannt, sondern $\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2GM/c^2R)$. Da in Gleichung (2.66) Φ selbst nicht auftritt, sondern nur die Ableitung Φ' , kann zu jeder Lösung $\Phi(r)$ eine beliebige Konstante addiert werden, was zu einer neuen Lösung von Gleichung (2.66) führt. Diese Konstante ist so zu wählen, dass die Randbedingung $\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2GM/c^2R)$ erfüllt wird. Möchte man den Verlauf von $\Phi(r)$ im Inneren des Sterns ermitteln, so integriert man zunächst das volle Differentialgleichungssystem (2.63)–(2.66) numerisch mit einem beliebigen Startwert $\Phi_1(0)$, bildet mit den erhaltenen Werten für R , $m(R)$, und $\Phi(R)$ die Differenz

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2Gm(R)}{c^2R} \right) - \Phi(R) \quad (2.75)$$

und lässt schließlich eine zweite Iteration laufen, bei der man den Startwert

$$\Phi_2(0) = \Phi_1(0) + \Delta\Phi \quad (2.76)$$

verwendet. Die zweite Iteration liefert dann den korrekten Verlauf von $\Phi(r)$ mit dem gewünschten Übergang in die äußere Schwarzschildlösung.

Im Folgenden betrachten wir Neutronensterne und Weiße Zwerge – jene kompakten Endzustände der stellaren Entwicklung, deren Struktur im Wesentlichen von der Gravitation bestimmt wird. Strahlungstransport- oder Konvektionsvorgänge bleiben unberücksichtigt; ferner verwende ich temperaturunabhängige Zustandsgleichungen und beschränke mich damit auf kalte Neutronensterne bzw. kalte Weiße Zwerge.

²⁰Da in den TOV-Gleichungen (2.64)–(2.66) r im Nenner steht, kann die Iteration nicht genau im Zentrum des Sterns beginnen. Ich definiere daher ein kleines r_0 und gehe davon aus, dass Dichte und Druck im Volumen $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ annähernd konstant sind, sodass für den ersten Iterationsschritt die Werte

$$r_0, \quad m_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \varrho_c, \quad \varrho_0 = \varrho_c, \quad p_0 = p(\varrho_c) \quad (2.74)$$

verwendet werden können.

2.6 Neutronensterne

Bei der numerischen Integration der TOV-Gleichungen verwende ich die Zustandsgleichung SLy von Douchin & Haensel [8], die den Zusammenhang zwischen Dichte und Druck im Kern und der Kruste des Neutronensterns approximativ wiedergibt. Wie Haensel & Potekhin [9] gezeigt haben, können die tabellarisch vorliegenden Werte von SLy durch die Funktion

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} f(a_5(\xi - a_6)) \\ & + (a_7 + a_8\xi) f(a_9(a_{10} - \xi)) \\ & + (a_{11} + a_{12}\xi) f(a_{13}(a_{14} - \xi)) \\ & + (a_{15} + a_{16}\xi) f(a_{17}(a_{18} - \xi)) \end{aligned} \quad (2.77)$$

angefittet werden, wobei die Abkürzungen $\zeta := \log p$, $\xi := \log \varrho$ und

$$f(x) = (e^x + 1)^{-1} \quad (2.78)$$

verwendet wurden. Die Werte der 18 Parameter a_i lauten:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 6,22 & a_7 = 19,105 & a_{13} = 4,3 \\ a_2 = 6,121 & a_8 = 0,8938 & a_{14} = 14,08 \\ a_3 = 0,005925 & a_9 = 6,54 & a_{15} = 27,80 \\ a_4 = 0,16326 & a_{10} = 11,4950 & a_{16} = -1,653 \\ a_5 = 6,48 & a_{11} = -22,775 & a_{17} = 1,50 \\ a_6 = 11,4971 & a_{12} = 1,5707 & a_{18} = 14,67 \end{array} \quad (2.79)$$

Neben der Zustandsgleichung selbst benötigen wir in (2.65) auch deren Ableitung nach ϱ . Mit

$$p = 10^\zeta, \quad \zeta = \zeta(\xi(\varrho)), \quad \xi(\varrho) = \log \varrho \quad (2.80)$$

gilt nach der Kettenregel

$$\frac{dp}{d\varrho} = \frac{\partial 10^\zeta}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{d\varrho} = 10^\zeta \ln 10 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{\xi \ln 10} = \frac{p}{\xi} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}. \quad (2.81)$$

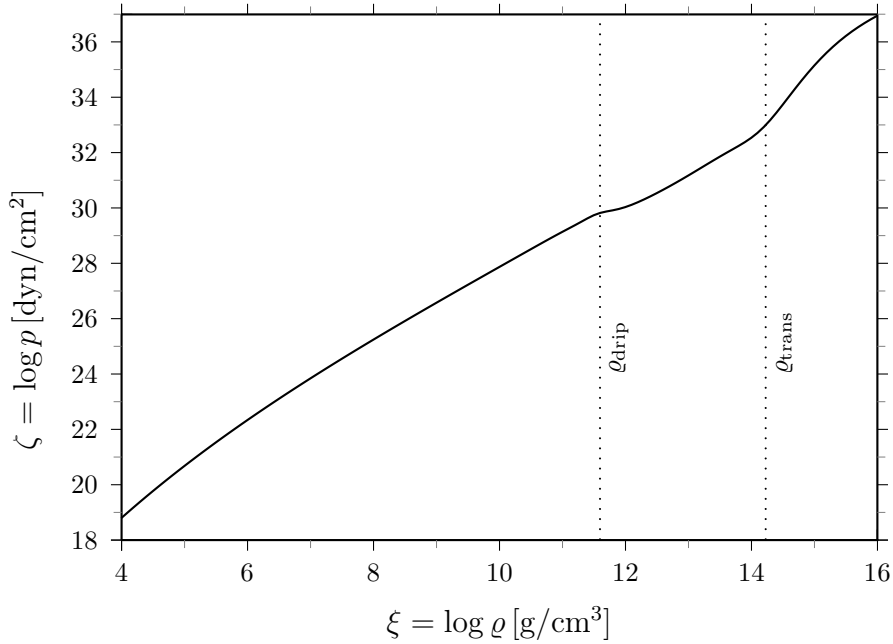


Abb. 3 Die Zustandsgleichung SLy der Neutronensternmaterie

Die Ableitung $\partial\zeta/\partial\xi$ kann direkt aus (2.77) berechnet werden. Sie lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = & \frac{(a_2\xi + 3a_3\xi^2)(1 + a_4\xi) - a_4(a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3)}{(1 + a_4\xi)^2} f(x_1) \\
 & - \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} a_5 e^{x_1} f^2(x_1) \\
 & + a_8 f(x_2) + (a_7 + a_8\xi) a_9 e^{x_2} f^2(x_2) \\
 & + a_{12} f(x_3) + (a_{11} + a_{12}\xi) a_{13} e^{x_3} f^2(x_3) \\
 & + a_{16} f(x_4) + (a_{15} + a_{16}\xi) a_{17} e^{x_4} f^2(x_4),
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_5(\xi - a_6), & x_3 &= a_{13}(a_{14} - \xi), \\
 x_2 &= a_9(a_{10} - \xi), & x_4 &= a_{17}(a_{18} - \xi).
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Die Zustandsgleichung SLy in ihrer durch Gleichung (2.77) gegebenen analytischen Form ist in Abbildung 3 dargestellt. Sie beschreibt die Materie eines Neutronensterns von der äußeren Kruste ($\rho \approx 10^4 \text{ g/cm}^3$) bis zum Zentrum, wo die Energiedichte bei ca. 0,5- bis 10-facher Kerndichte ($\approx 2,5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$) liegt. Die Materie der **äußeren Kruste** besteht – wie auch das Innere eines Weißen Zwergs – aus einem entarteten Elektronengas und Atomkernen, die ein Kristall-

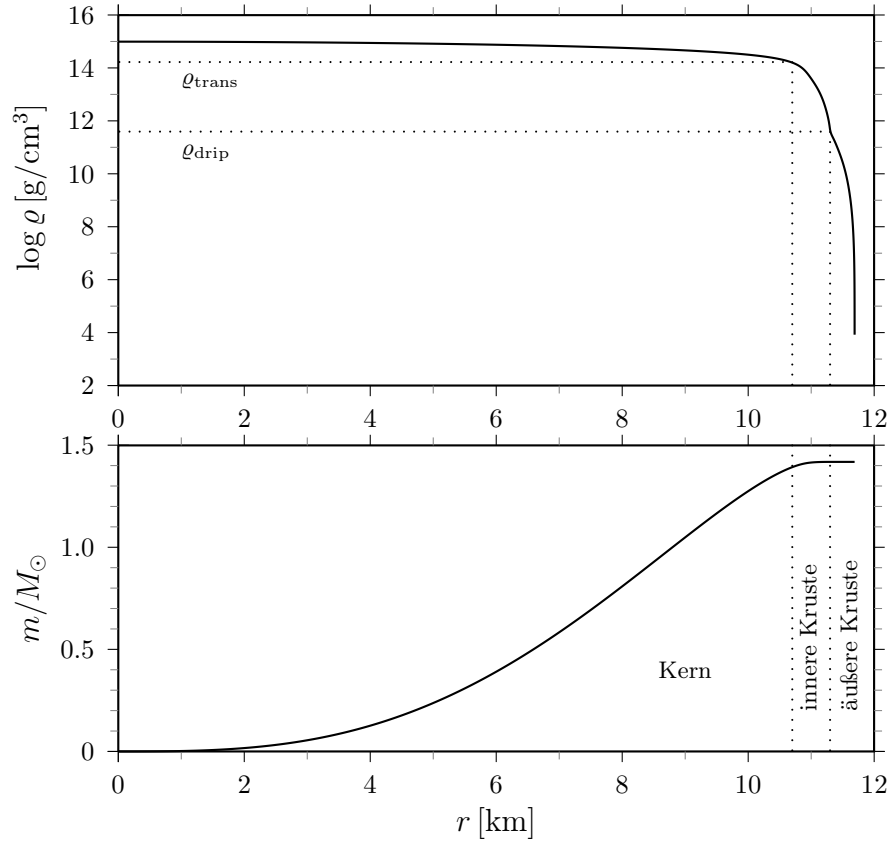


Abb. 4 Energiedichte und totale Masse eines Neutronensterns mit $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$

gitter bilden. Außen herrschen ^{56}Fe -Kerne vor, während weiter innen mit zunehmender Dichte immer neutronenreichere Kerne auftreten. Der Übergang von der äußeren zur **inneren Kruste** bei $\rho_{\text{drip}} \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ist in Abbildung 3 durch ein plötzliches Abflachen der Zustandsgleichung zu erkennen. Ab dieser Dichte „tröpfeln“ Neutronen aus den Atomkernen, und ein Gas aus Neutronen und Elektronen füllt den Raum zwischen neutronenreichen Atomkernen. Mit steigender Energiedichte wächst der Anteil freier Neutronen, bis sich die Atomkerne ab einer Übergangsdichte von etwa $\rho_{\text{trans}} \approx 1,7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ aufzulösen beginnen, und sich eine stark inkompressible Neutronenflüssigkeit bildet, der noch ein kleiner Anteil an Protonen und Elektronen beigemischt ist. Aus dieser Materie besteht der **Kern** des Neutronensterns.²¹

In Abbildung 4 sind die Ergebnisse der numerischen Integration des Differentialgleichungssystems (2.63)–(2.65) für einen Stern mit $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ dargestellt: Sein Dichteprofil $\rho(r)$ und der Verlauf der totalen Masse $m(r)$ vom Zentrum bis

²¹Siehe auch Camenzind [10], Seite 188, 242 f.

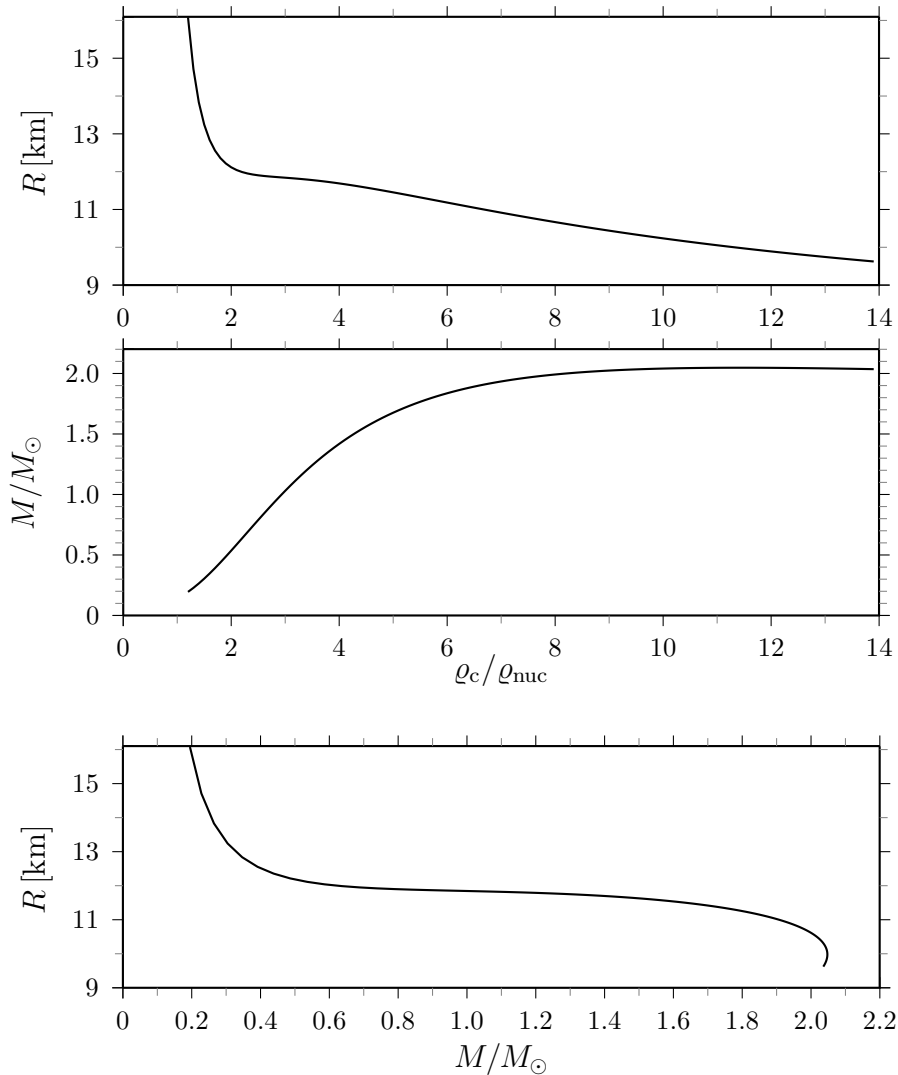


Abb. 5 Radius und Gesamtmasse von Neutronensternen verschiedener Zentraldichten

zum Rand des Sterns. Für diese zentrale Energiedichte erhalten wir einen Neutronenstern mit Radius $R = 11,689$ km und Gesamtmasse $M = 1,418 M_\odot$. Er besteht aus einem $10,67$ km großen Kern, einer etwa 630 m dicken inneren Kruste und einer ca. 390 m dicken äußeren Kruste. Wie in Abbildung 4 oben zu sehen ist, grenzt sich die innere Kruste durch einen plötzlichen, sehr starken Abfall der Dichte bei $r = 10,67$ km (ρ_{trans}) deutlich vom Kern ab; den Übergang von der inneren zur äußeren Kruste markiert ein abruptes Abflachen der Dichte bei $r = 11,30$ km (ρ_{drip}).

Variiert man die zentrale Dichte im Intervall $\rho_c/\rho_{\text{nuc}} = [1, 14]$, so erhält man eine Sequenz von Neutronensternen unterschiedlicher Größen und Massen. In Abbildung 5 sind Radius R und Gesamtmasse M als Funktionen der Zentraldichte ρ_c

aufgetragen, sowie R in Abhängigkeit von M . In der so erzeugten Sequenz von Lösungen sind jedoch nicht alle Konfigurationen stabil. Eine notwendige Bedingung, damit es sich bei einer Lösung $M(\varrho_c)$ um eine instabile Konfiguration handelt, lautet $dM(\varrho_c)/d\varrho_c < 0$. Das Maximum der $M(\varrho_c)$ -Kurve in Abbildung 5 stellt demnach den massereichsten noch stabilen Neutronenstern mit $M_{\max} = 2,047 M_{\odot}$ dar. Es liegt bei etwa 11,4-facher Kerndichte, d.h. bei $\varrho_c = 2,85 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$, und einem Sternradius von $R = 9,986 \text{ km}$. Im $R(M)$ -Diagramm entspricht es dem Punkt, in dem die Kurve rückläufig wird. Eine wichtige Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, dass Konfigurationen mit höheren Zentralkichten instabil sind.

2.7 Weiße Zwerge

Zur numerischen Integration der TOV-Gleichungen für Weiße Zwerge verwende ich die Zustandsgleichung²²

$$p(\varrho) = \frac{m_e c^2}{\Lambda_e} \frac{1}{8\pi^2} \left[\sqrt{1 + \xi^2} \left(\frac{2}{3} \xi^2 - 1 \right) \xi + \ln \left(\sqrt{1 + \xi^2} + \xi \right) \right],$$

$$\xi = 1,0088 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\varrho}{\mu_e} \right)^{1/3} \quad (2.84)$$

mit der Comptonwellenlänge des Elektrons $\Lambda_e = \hbar/m_e c$ und dem mittleren Molekulargewicht pro Elektron $\mu_e \approx 2$. Für einen Weißen Zwerg der zentralen Dichte $\varrho_c = 10^6 \text{ g/cm}^3$ ergibt sich der in Abbildung 6 gezeigte Verlauf der Energiedichte $\varrho(r)$ und totalen Masse $m(r)$. Eine Variation der zentralen Dichte führt auf die in Abbildung 7 gezeigte Sequenz von Lösungen $M(\varrho_c)$. Auch hier gibt es eine maximale Masse, die in etwa bei der Chandrasekhar-Grenze von $1,4 M_\odot$ liegt.

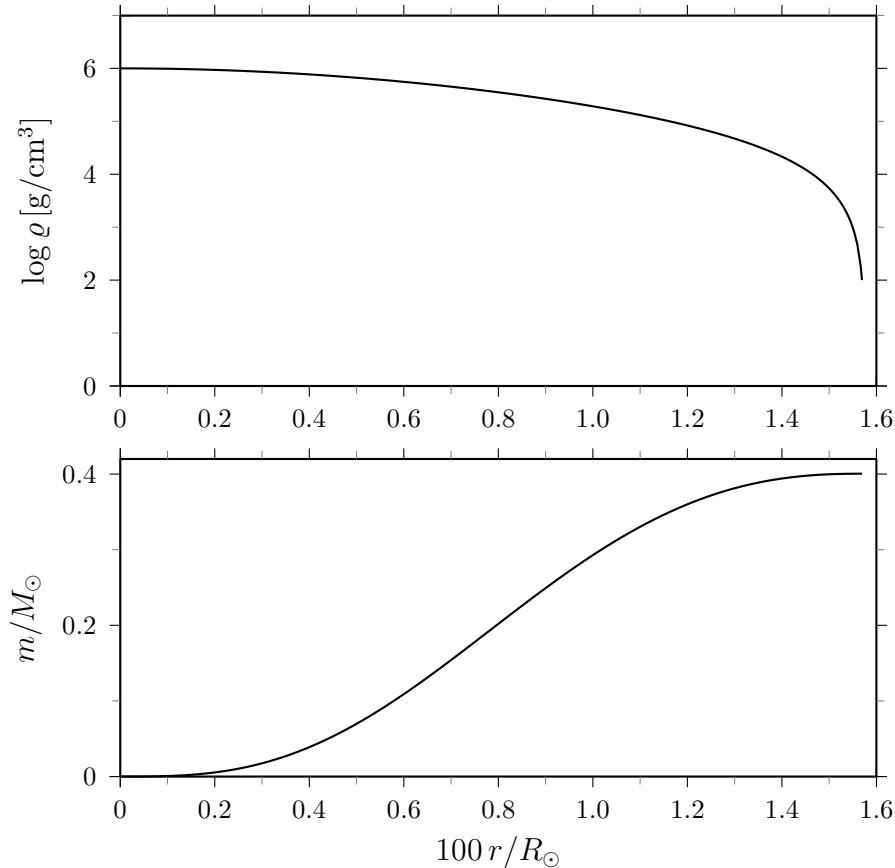


Abb. 6 Dichte und totale Masse eines Weißen Zwerges mit $\varrho_c = 10^6 \text{ g/cm}^3$

²²Siehe Camenzind [10], Seite 154 ff.

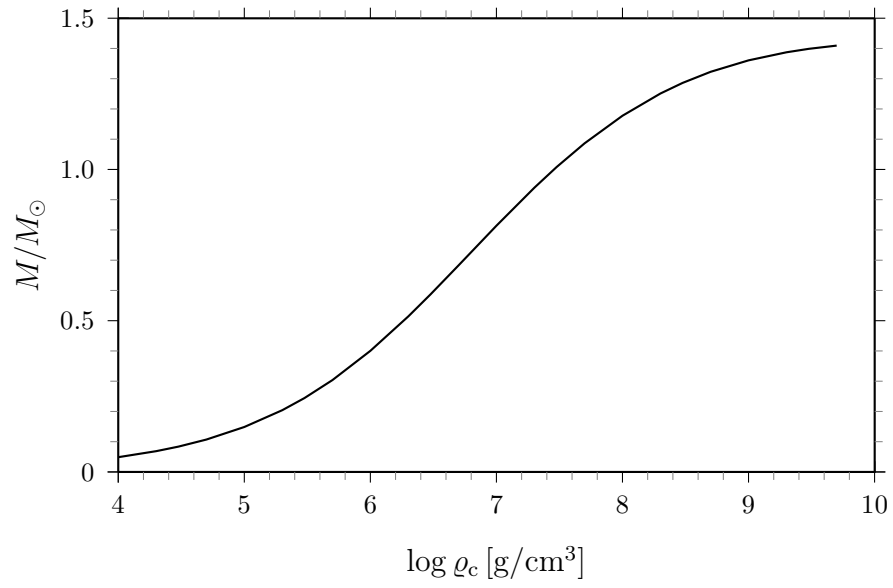


Abb. 7 Gesamtmasse von Weißen Zwergen mit variierender Zentraldichte

Literaturverzeichnis

- [1] M. G. Bernhardt, *Kompakte Sterne in der Branenwelt*, Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, (2009)
<http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/9309>
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1972
- [3] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, San Francisco, Boston, New York u.a., 2004
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1973
- [5] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev. **55**, 374 (1939)
- [6] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 189 (1916)
- [7] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 424 (1916)
- [8] F. Douchin, P. Haensel, *A unified equation of state of dense matter and neutron star structure*, A&A **380**, 151 (2001)
arXiv:astro-ph/0111092v2
- [9] P. Haensel, A. Y. Potekhin *Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter*, A&A **428**, 191 (2004)
arXiv:astro-ph/0408324v2
- [10] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007