Gravitationswellen und deren Nachweis

Dr. Werner Becker

Max-Planck Institut für extraterrestrische Physik Giessenbachstrasse 1, 82041 Garching

web@mpe.mpg.de

http://www.xray.mpe.mpg.de/~web

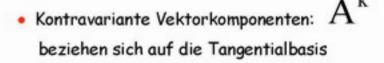
Gravitationswellen und deren Nachweis

- 1.) Die Wellengleichung
 - · Die linearisierten Feldgleichungen, Lorentz-Eichung
- 2.) Eigenschaften von Gravitationswellen
 - · Untersuchung der homogenen Wellengleichung
 - · Wirkung auf frei fallende Testmassen, Polarisationsmoden
- 3.) Quellen von Gravitationswellen
 - Untersuchung der inhomogenen Wellengleichung, Quadrupolformel
- 4.) Indirekter Nachweis von Gravitationswellen
 - Der Binärpulsar PSR 1913+16, Nobelpreis 1993
- 5.) Die aktuellen Experimente
 - Laser-Interferometer Experimente und Resonanzantennen

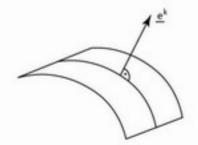
Nomenklatur:

Ko- und kontravarainte Vektor-/Tensorkomponenten:

- Unterscheidung typisch für Vektoren in (beliebigen) schiefwinkligen Koordinatensystemen
- entsprechend den verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten für Basisvektoren in beliebigen Koordinatensystemem
- ullet Kovariante Vektorkomponenten: A_k beziehen sich auf die reziproke Vektorbasis



A₁



$$\underline{A} = A_k \underline{e}^k$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{ik}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{ik}}$$

$$\underline{A} = A^k \underline{e}_k$$

$$\underline{A} = A^k \underline{e}_k$$
$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{ik}} dx^{ik}$$



Nomenklatur:

Transformation zwischen ko- und kontravarianten Komponenten:

$$x^{n} = g^{nk} x_{k}$$
 $x_{k} = g_{kn} x^{n}$

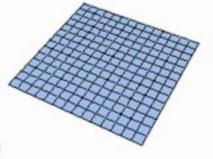
Metrik-Tensor (Signatur: + - - -)

- Über gleiche Indizes wird summiert: $A^k A_k = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3$
- Partielle Ableitung nach der Koordinate x^n : $\frac{\partial}{\partial x^n} A^k \equiv \partial_n A^k \equiv A^k_{,n}$

Der Raum ist nicht Schauplatz des physikalischen Geschehens, sondern ein Aspekt der Wechselwirkung und der Bewegung der Materie:

- Die Materie bestimmt die Krümmung des Raumes
 - Der Raum bestimmt die Bewegung der Materie
 - Alle Materie in Bewegung, Geometrie der Raumzeit ändert sich ständig
 - → Gravitationsfeld: Veränderung der Metrik von Raum und Zeit

Raum ohne Masse



keine Krümmung (Pseudo-Euklidischer Raum)

$$ds^2 = \eta_{ik} dx^i dx^k$$

"Flachraum"-
Metrik
$$\eta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Raum ist nicht Schauplatz des physikalischen Geschehens, sondern ein Aspekt der Wechselwirkung und der Bewegung der Materie:

- Die Materie bestimmt die Krümmung des Raumes
 - Der Raum bestimmt die Bewegung der Materie
 - Alle Materie in Bewegung, Geometrie der Raumzeit ändert sich ständig
 - Gravitationsfeld: Veränderung der Metrik von Raum und Zeit

Masse

= Raumkrümmung (Riemannscher Raum)

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

allgemeiner Metrik-Tensor:

$$g_{1k}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

ist die das Gravitationsfeld beschreibende Größe

Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{lk} + \Lambda g_{ik} + \Lambda g_{ik} + \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{lk} + \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{l$$

Christoffel-Symbol:
$$\Gamma_{nk}^{l} = \frac{1}{2}g^{lj}(g_{jn,k} - g_{nk,j} + g_{jk,n})$$

Nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der 6 unabhängigen Komponenten des Metrik-Tensors, der 3 unabhängigen Komponenten der 4er Geschwindigkeit sowie der Materiedichte (bzw. des Drucks).

- Beitrag der Sonne zur Raumkrümmung: 10-6
- Beitrag der Erde zur Raumkrümmung: 10-9

Annahme:

Metrik des Raumes weicht nur wenig von der des euklidisch-flachen Raumes ab:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \qquad h_{ik} \ll 1$$
$$g^{ik} = \eta^{ik} - h^{ik} \qquad h^k_{i} = \eta^{kl} h_{il}$$

$$g^{ik} = \eta^{ik} - h^{ik} \qquad h^k_{i} = \eta^{kl} h_{ik}$$

- Entkopplung der Feldgleichungen durch Linearisierung:
 - ullet Vernachlässigung aller Terme höherer als von erster Ordnung in $h_{::}$ sowie in deren Ableitungen
 - Nebeneffekt: in der linearisierten Theorie hat das Gravitationsfeld keine Rückwirkung auf die Bewegung der felderzeugenden Materie mehr (d.h. keine Retardierung!)

Linearisierte Feldgleichungen:

$$-\bar{h}_{mn',l}^{\ \ ,l} - \eta_{mn} \,\bar{h}_{\ \ ,lk}^{\ lk} + \bar{h}_{n,ml}^{\ l} + \bar{h}_{m,nl}^{\ l} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{mn}$$

$$\overline{h}_{mn} \equiv h_{mn} - \frac{1}{2} \eta_{mn} h$$

Weitere Vereinfachung durch geeignete Wahl des Koordinatensystems (Eichinvarianz),
 reduziert die Feldgleichungen bis auf den ersten Term

$$-\overline{h}_{mn}^{\ \ l} = -\partial^l \partial_l \overline{h}_{mn} = -\eta^{lk} \partial_k \partial_l \overline{h}_{mn} = -\eta^{lk} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} \overline{h}_{mn} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) \overline{h}_{mn}$$

Wellengleichung:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\overline{h}_{mn} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{mn}$$

Gravitationswellen und deren Nachweis

- 1.) Die Wellengleichung
 - · Die linearisierten Feldgleichungen, Lorentz-Eichung
- 2.) Eigenschaften von Gravitationswellen
 - Untersuchung der homogenen Wellengleichung
 - · Polarisationsmoden, Wirkung auf frei fallende Testmassen
- 3.) Quellen von Gravitationswellen
 - · Untersuchung der inhomogenen Wellengleichung, Quadrupolformel
- 4.) Indirekter Nachweis von Gravitationswellen
 - Der Binärpulsar PSR 1913+16, Nobelpreis 1993
- 5.) Die aktuellen Experimente
 - Laser-Interferometer Experimente und Resonanzantennen

 Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung lässt sich durch eine Superposition von ebenen monochromatischen Wellen darstellen:

$$A_{lm}k^m=0$$
 $igwedge$ A orthogonal zu K Gravitationswellen transversal

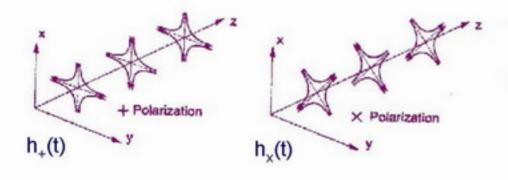
Wellenvektor ist Nullvektor

 Gravitationswellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus, sie sind transversal und besitzen zwei Freiheitsgrade der Polarisation

 $k_{i}k' = 0$

Ebene Welle in Z-Richtung:

 Die beiden von einander unabhängige Polarisationszustände gehen durch Rotation um 45 Grad ineinander über:



- Die Metrik "schwingt" periodisch in der xy-Ebene
- Relativbeschleunigung benachbarter
 Punkte durch Gezeitenkräfte

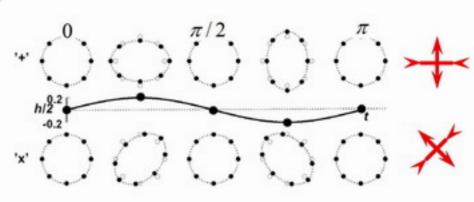
• Effekt der GW:

• Abstand zwischen zwei benachbarten Testmassen die in den Punkten $P_1 = (0,0,0)$ und $P_2 = (\varepsilon,0,0)$ mit $|\varepsilon| \ll 1$ ruhen.

$$\int_{R}^{P_{2}} ds = \int_{R}^{P_{2}} \left| g_{ik} dx^{i} dx^{k} \right|^{\frac{1}{2}} = \int_{0}^{\varepsilon} \left| g_{xx} \right|^{\frac{1}{2}} dx \simeq \left| g_{xx} (P_{1}) \right|^{\frac{1}{2}} \varepsilon \simeq \left[1 + \frac{1}{2} \overline{h}_{xx} (P_{1}) \right] \varepsilon$$

- Gravitationswellen ändern die Distanz zwischen den Testmassen! $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}h$
- Wirkung auf einen Ring von freien Testmassen:





Aufgetragen ist die Distanz (!) zwischen den Testmassen

Gravitationswellen und deren Nachweis

- 1.) Die Wellengleichung
 - · Die linearisierten Feldgleichungen, Lorentz-Eichung
- 2.) Eigenschaften von Gravitationswellen
 - Untersuchung der homogenen Wellengleichung
 - · Wirkung auf frei fallende Testmassen, Polarisationsmoden
- 3.) Quellen von Gravitationswellen
 - Untersuchung der inhomogenen Wellengleichung, Quadrupolformel
- 4.) Indirekter Nachweis von Gravitationswellen
 - Der Binärpulsar PSR 1913+16, Nobelpreis 1993
- 5.) Die aktuellen Experimente
 - Laser-Interferometer Experimente und Resonanzantennen

Inhomogene
 Wellengleichung:

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) \overline{h}_{ik} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{ik}$$

 Die quellenmäßigen Lösungen der inhomogenen Wellengleichung sind die Greenschen "retardierten" Potentiale:

$$\overline{h}_{ik}(\underline{r},t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{1}{r} T_{ik}(\underline{r}',t') d^3x' \qquad r \approx |\underline{r} - \underline{r}'|$$
Aufpunkt (r',t)
$$t' = t - \frac{r}{c}$$

$$\underline{r}'$$

$$\underline{r}'$$

$$\underline{r}'$$
Beobachter (r,t)
$$\underline{r}$$
Inselförmige
Massenverteilung
$$\underline{r}$$
Massenverteilung
$$\underline{r}$$

• alle Integrale über $T_{\alpha\beta}$ lassen sich durch Integrale ausdrücken die nur die Komponente T_{00} enthalten.

$$T_{00} = \rho(t', \underline{r'}) c^2$$

$$Massendich$$

$$\overline{h}_{\alpha\beta}(t,\underline{r}) = -\frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\underline{r}') x'^{\alpha} x'^{\beta} d^3 x'$$

Lässt sich durch Quadrupoltensor ausdrücken

• Quadrupoltensor: $D_{\alpha\beta}(t,\underline{r}) \equiv \int \rho(\underline{r}') \left[3x'^{\alpha} x'^{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^{2} \right] d^{3}x'$

Gravitationswellen: ~ Quadrupolstrahlung

Energieverlust des strahlenden Systems:

Quadrupolformel
$$-\frac{dE}{dt} = L_{GW} = \frac{G}{45c^5} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta} \right\rangle$$
(A.Einstein 1916)

Pfaller'scher Gravitationswellengenerator: Energieabstrahlung

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \Theta^2 \Omega^6 \qquad 6. \text{ Potenz}$$

$$\frac{G}{c^5} = 2.75 \times 10^{-53} \text{ (Watt)}^{-1}$$

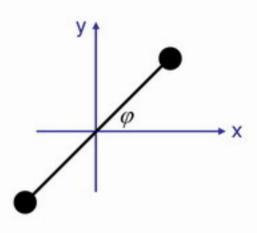
Wie groß ist die Strahlungsleistung?

$$-\frac{dE}{dt} = 3.2 \ 10^{-44} \ \mathrm{J s^{-1}} \qquad E_{_{\mathrm{Granton}}} = \hbar \Omega_{_{\mathrm{ov}}} = \hbar (2\Omega)$$
$$E_{_{\mathrm{Granton}}} = 3.97 \ 10^{-22} \ \mathrm{J}$$

$$\frac{V}{dt} = \frac{-dE/dt}{E_{observed}} = 8 \cdot 10^{-13} \,\text{s}^{-1}$$
 ~ 1 Gra

• Binärsystem: 2 NS auf Kreisbahn um gem. Schwerpunkt, Umlaufzeit 1h

3tes Keplersches Gesetz:
$$\Omega^2 = \frac{4\pi^2}{P_b} = \frac{GM}{a^3}$$
 $M = m_{NS} + m_{NS}$



Strahlungsleistung des Binärsystems:

$$m_{NS} = 1.4 \text{ M}_{\odot}$$
 $M_{\odot} \simeq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}}$
 $a \approx 5 \cdot 10^8 \text{m}$ $\Omega = 1.74 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$ $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a^4 \Omega^6$$

$$\begin{cases}
-\frac{dE}{dt} = 6.0 \ 10^{26} \,\mathrm{Js^{-1}} & E_{\text{\tiny Garman}} = 3.48 \ 10^{-37} \,\mathrm{J} \\
\frac{dN}{dt} = \frac{-dE/dt}{E_{\text{\tiny Garman}}} = 1.73 \ 10^{63} \,\mathrm{s^{-1}} & f_{GW} = 1.44 \ 10^{25} \,\mathrm{s^{-1}m^{-2}} \\
d = 320 \,\mathrm{Li}
\end{cases}$$

Strahlungsleistung vergleichbar mit der der Sonne, wenn auch bei anderen Wellenlängen

- Binärsystem: 2 NS auf Kreisbahn um gem. Schwerpunkt, Umlaufzeit 1h
- Amplituden der GW-Welle:

$$h_{+} = \frac{1}{r} \frac{8G}{c^4} \mu \, a^2 \Omega^2 \cos(2\Omega t)$$

$$h_{x} = \frac{1}{r} \frac{8G}{c^4} \mu \, a^2 \Omega^2 \sin(2\Omega t)$$

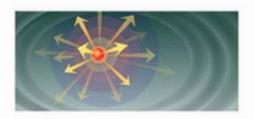
Frequenz der GW = doppelte Umlauffrequenz

Abstand Beobachter-Quelle

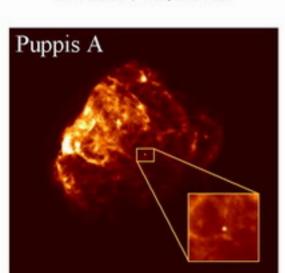
$$|h_x| = 2.26 \cdot 10^{-18}$$
 für einen Abstand Beobachter-Quelle von 320 Lj

Kosmische Quellen von Gravitationswellen:

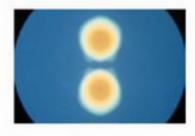
die energiereichsten und heftigsten Vorgänge im Universum



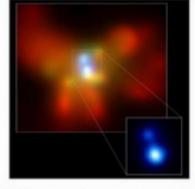
Urknall /Inflation



Supernovae asymmetrischer Core-collapse



Doppelsternsysteme



Kollidierende superschwere Schwarze Löcher



Akkretierende Neutronensterne



Gravitationswellen von Supernovae:

 verläuft der Core-collaps asymmetrisch, können bis zu ~ 1 % der Gravitationsbindungsenergie in Form von GW abgestrahlt werden

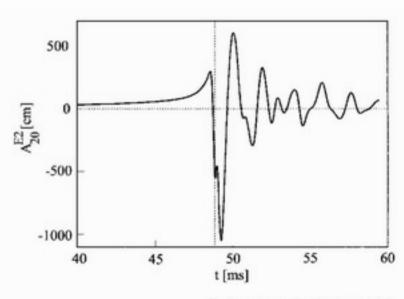
Signalform: Impuls, $f \sim 1 \text{ kHz}$

z.B. berechnetes Signal für den Kollaps eines durch Rotation abgeplatteten Sterns:

GW-Stärke und Häufigkeit:

h ~ 10-18 in der Milchstraße

h ~ 10⁻²¹ im Virgo-Cluster
 Rate: einige pro Jahr



T. Zwerger, E. Müller 1997

Kenntnis der Signalform wichtig (Templates für die Detektion)

Gravitationswellen von kompakten Binärsystemem



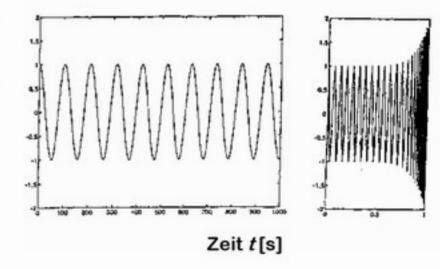
- Zwei Neutronensterne oder Schwarze Löcher, die einander umkreisen und schließlich verschmelzen
- Amplitude und Wellenform sind sehr gut bekannt

Signalform: quasi-periodisch, f ~ 100 Hz, Endphase "zirpsen"

GW-Stärke:

h ~ 10⁻¹⁸ in der Milchstraße
 h ~ 10⁻²¹ im Virgo-Cluster

Rate der Verschmelzungen: einige pro Jahr

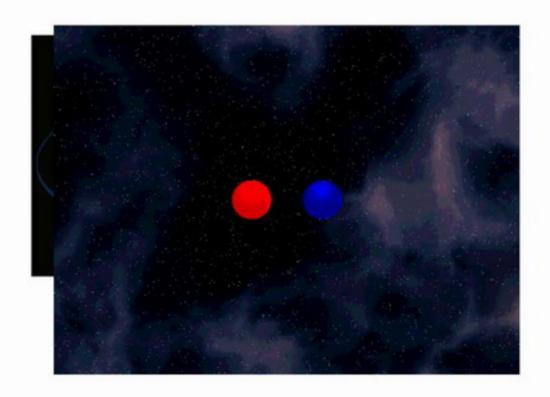


Gravitationswellen und deren Nachweis

- 1.) Die Wellengleichung
 - · Die linearisierten Feldgleichungen, Lorentz-Eichung
- 2.) Eigenschaften von Gravitationswellen
 - Untersuchung der homogenen Wellengleichung
 - · Wirkung auf frei fallende Testmassen, Polarisationsmoden
- 3.) Quellen von Gravitationswellen
 - · Untersuchung der inhomogenen Wellengleichung, Quadrupolformel
- 4.) Indirekter Nachweis von Gravitationswellen
 - Der Binärpulsar PSR 1913+16, Nobelpreis 1993
- 5.) Die aktuellen Experimente
 - Laser-Interferometer Experimente und Resonanzantennen

Das Binärpulsar-System PSR 1913+16

- 2 NS (1.4 Mo)
- Abstand 6.5 Ls
- P_b=7h 45min
- e=0.62
- P_{PSR}=59 ms
- Entf.~19000 Lj



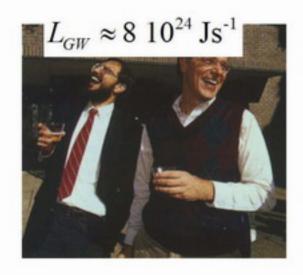
- Pulsar-Timing: -> Zeiten des Periastrondurchgangs ändern sich
- Verkleinerung des Abstandes beider NS von 3mm pro Orbit

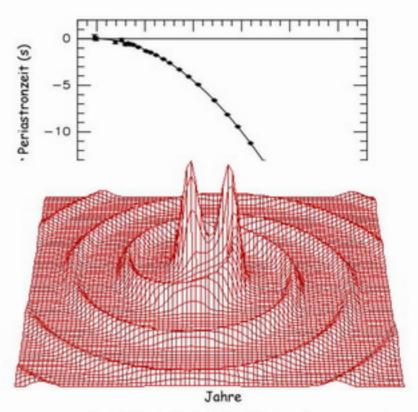
→ Verkürzung der Bahnperiode

$$\dot{P}_{bGW} = (-2.40247 \pm 0.00002) \times 10^{-12} \text{s/s}$$

$$\dot{P}_{b-abs} = (-2.4086 \pm 0.0052) \times 10^{-12} \text{ s/s}$$

 Δt_p stimmt mit dem Wert überein, den die Allgemeine Relativitätstheorie vorhersagt (auf < 1 %).





Indirekter Nachweis von Gravitationswellen!

Nobelpreis für Physik 1993

Joseph Weber (1919 - 2000)

Der Pionier der GW-Forschung:





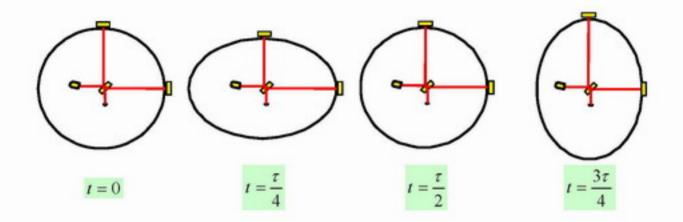
Resonanzantennen ("Weber-Zylinder")

Nachteil: nur geringe Nachweisempfindlichkeit, schmalbandig, f~1 kHz

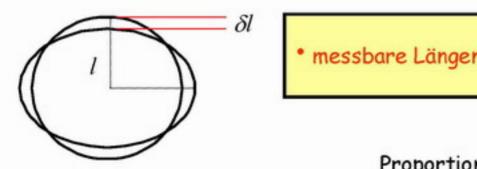
Gravitationswellen und deren Nachweis

- 1.) Die Wellengleichung
 - · Die linearisierten Feldgleichungen, Lorentz-Eichung
- 2.) Eigenschaften von Gravitationswellen
 - Untersuchung der homogenen Wellengleichung
 - · Wirkung auf frei fallende Testmassen, Polarisationsmoden
- 3.) Quellen von Gravitationswellen
 - · Untersuchung der inhomogenen Wellengleichung, Quadrupolformel
- 4.) Indirekter Nachweis von Gravitationswellen
 - Der Binärpulsar PSR 1913+16, Nobelpreis 1993
- 5.) Die aktuellen Experimente
 - Laser-Interferometer Experimente (und Resonanzantennen)

Nachweisprinzip der Laser-Interferometer Antennen:



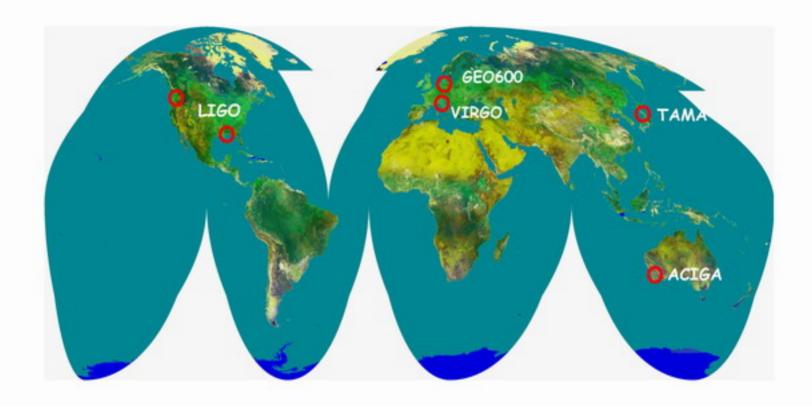
Strahlteiler und Spiegel dienen als Testmassen







Weltweites Netzwerk von Gravitationswellendetektoren



Laser-Interferometerantennen

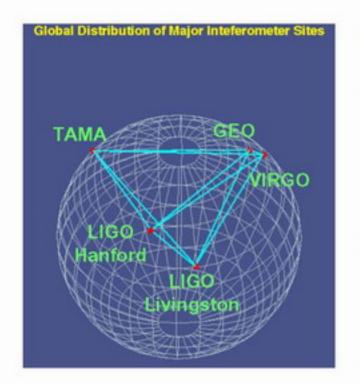
 LIGO (USA)
 : 4 km Armlänge (Messbeginn 2001/2002)

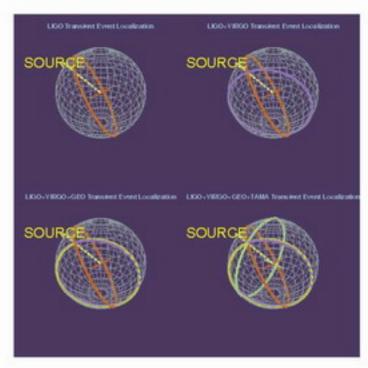
 GEO 600 (D/GR)
 : 600m Armlänge (Messbeginn 2001/2002)

 VIRGO (I/FR)
 : 3 km Armlänge (Messbeginn ~ 2003+)

 TAMA (Japan)
 : 300m Armlänge (Messbeginn 2000)

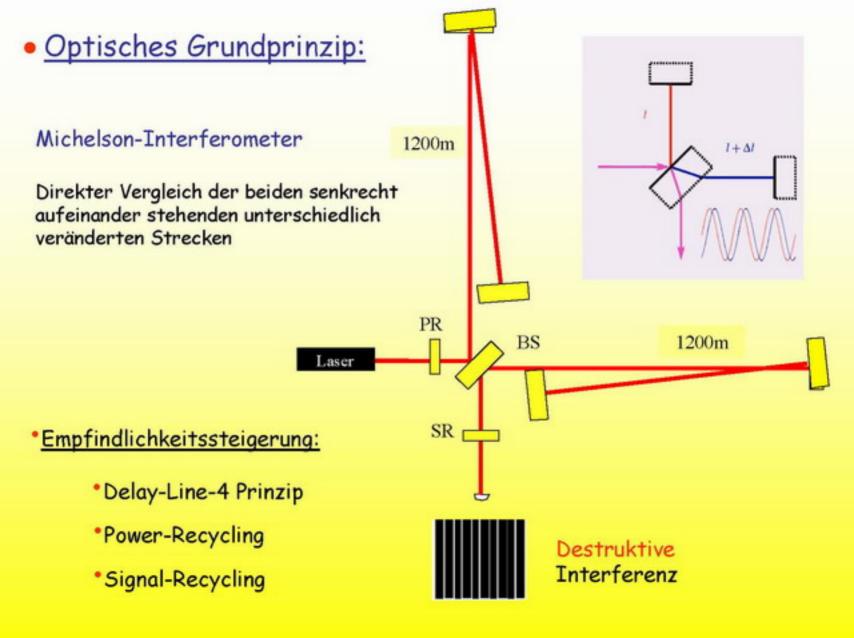
Interferometer-Netzwerk:





- Notwendig zur Verifizierung des Signals durch Koinzidenzmessungen!
- Erforderlich für Richtungsempfindlichkeit und "Ortsauflösung" (Triangulation)



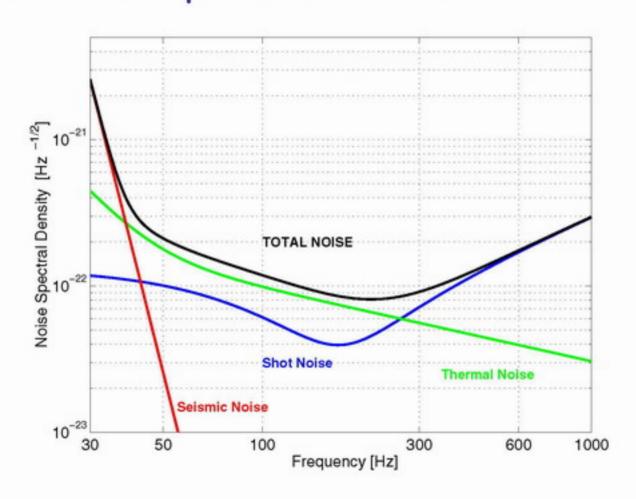


Störquellen:

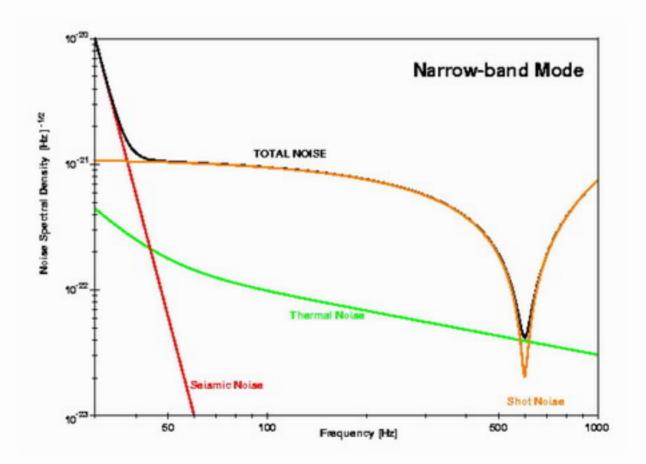
- = Rauschen = alles, was ein GW-Signal vortäuscht, z.B.
 - Seismik, Fahrzeuge, Wolken, Nordseewellen, ...
 - Luftbewegung (Akustik, Lichtstreuung)
 - Wärmebewegung der Materialien
 - Strahlungsdruck des Lichts auf die Spiegel
 - Schrotrauschen

Gegenmaßnahmen: Rauschen unterdrücken! oder in einen Frequenzbereich verschieben, wo es nicht stört

*Breitbandempfindlichkeit von GEO 600



Empfindlichkeit von GEO 600



Frequenzbereich ~ 50 Hz - 1 kHz

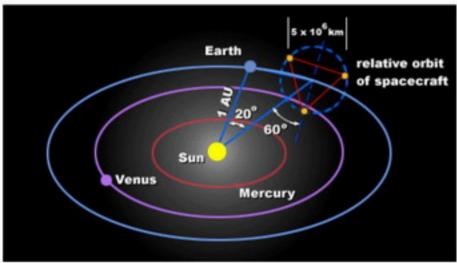
"Laser Interferometer Space Antenna"

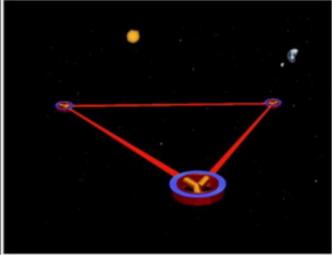






Ein Laserinterferometer im Al mit 5 Mio km Armlänge





Drei Satelliten in heliozentrischer Umlaufbahn 20° hinter der Erde

Vorgesehener Start: 2011

